TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi Laplace adalah suatu metode operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier. Dengan menggunakan transformasi Laplace, dapat diubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam, dan fungsi eksponensial menjadi fungsi-fungsi aljabar variabel kompleks s. Bila persamaan aljabar dalam s dipecahkan, maka penyelesaian dari persamaan diferensial (transformasi Laplace balik dari variabel tidak bebas) dapat diperoleh dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Suatu kelebihan metode transformasi Lapalace adalah bahwa metode ini memungkinkan penggunaan teknik grafis untuk meramal kinerja sistem tanpa menyelesaikan persamaan diferensial sistem. Kelebihan lain metode transformasi Laplace adalah diperolehnya secara serentak baik komponen transien maupun komponen keadaan tunak.

Secara sederhana prosedur dasar pemecahan menggunakan metode transformasi Laplace adalah:

- Persamaan diferensial yang berada dalam kawasan waktu (*t*), ditransformasikan ke kawasan frekuensi (*s*) dengan transformasi Laplace. Untuk mempermudah proses transformasi dapat digunakan tabel transformasi laplace.
- Persamaan yang diperoleh dalam kawasan *s* tersebut adalah persamaan aljabar dari variabel *s* yang merupakan operator Laplace.
- Penyelesaian yang diperoleh kemudian ditransformasi-balikkan ke dalam kawasan waktu.
- Hasil transformasi balik ini menghasilkan penyelesaian persamaan dalam kawasan waktu.

Secara umum Transformasi Laplace digunakan mentransformasikan sinyal atau sistem dari kawasan waktu ke kawasan-s.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Persamaan 1.1

Fungsi F(s) adalah transformasi Laplace dari f(t) yang adalah suatu frekuensi s, s = σ+ jw

Contoh :

1. Hitunglah transformasi laplace untuk fungsi undak satuan (unit step) u(t)

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty 1e^{-st}dt$$
$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty$$
$$= \left(-\frac{1}{s}e^{-s.\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s}e^{-s.0}\right)$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

2. Hitunglah transformasi laplace dari $f(t) = e^{-at}$!

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$
$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty$$
$$= \left(-\frac{1}{s+a}e^{-\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s+a}e^{-0}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{s+a}\right)$$
$$= \frac{1}{s+a}$$

3. Hitunglah transformasi laplace dari $f(t) = At$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty Ate^{-st}dt = A\int_0^\infty te^{-st}dt$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = At\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty - A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}dt$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = 0 - A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}dt = A\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}dt$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s}\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty = \left(-\frac{1}{s^2}e^{-s\infty}\right) - \left(-\frac{1}{s^2}e^{-s0}\right)$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$$

4. Hitunglah transformasi laplace dari $f(t) = \mathrm{A} \sin \omega t$

Berdasarkan rumus Euler,

$$\mathrm{A} \sin \omega t = A \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

maka

$$\mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-st} dt = A \int_0^\infty \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^\infty \frac{1}{2j}\left(e^{(j\omega - s)t} - e^{(-j\omega - s)t}\right) dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^\infty \frac{1}{2j}\left(e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right) dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{2j}\left[\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} dt\right]$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{-(s-j\omega)} e^{-(s-j\omega)t}\Big|_0^\infty - \frac{1}{-(s+j\omega)} e^{-(s+j\omega)t}\Big|_0^\infty\right)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A}{2j}\left(\frac{s + j\omega - (s - j\omega)}{s + \omega^2}\right) = \frac{A}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s + \omega^2}\right)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{A\omega}{s + \omega^2}$$

Untuk mempermudah proses transformasi laplace kita dapat menggunakan table transforamasi laplace :

Tabel Transformasi Laplace

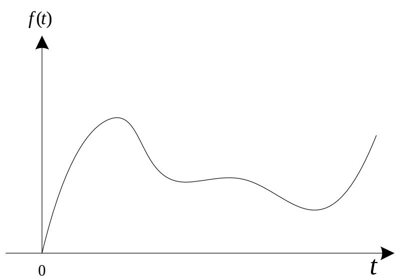
No	$f(t)$	$F(s)$
1	Impuls satuan $\delta(t)$	1
2	Unit step $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n, \quad dimana\ n = 1,2,3 \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

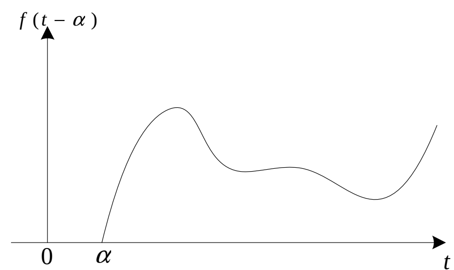
SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE

1. Kombinasi Linear
   Jika $f1(t)\ dan\ f2(t)$ adalah dua fungsi waktu yang berbeda maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t)+f_2(t)] &= \int_0^\infty [f_1(t)+f_2(t)]e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]\end{aligned}$$

2. Translasi Fungsi
   kita akan mencari transformasi Laplace dari fungsi yang ditranslasikan, $f(t-\alpha)$ disini ,
   $f(t) \to 0$ untuk nilai $t < 0$ atau dengan kata lain
   $f(t-\alpha) \to 0$ untuk nilai $t < \alpha$





Karena $f(t-\alpha) = 0\ untuk\ 0 < t < \alpha$, maka

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\, e^{-su} du \qquad\qquad dimana\ u = t-\alpha$$

$$= \int_0^\infty f(t-\alpha)\, e^{-s(t-\alpha)} dt$$

$$= e^{\alpha s}\int_0^\infty f(t-\alpha)\, e^{-st} dt$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s)$$

3. Perkalian $f(t)$ dengan $e^{-\alpha t}$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt$$
$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st-\alpha t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt$$
$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt = F(s+\alpha)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha)$$

4. Penskalaan Waktu $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha st}{\alpha}}d(\frac{t}{a})$$
$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha st}{\alpha}}d(\frac{t}{\alpha}) \qquad jika\frac{t}{\alpha} = \tau$$
$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-\alpha s\tau}d(\tau)$$
$$= \alpha F(s)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}\left[f(\frac{t}{\alpha})\right] = \alpha F(s)$$

5. Diferensiasi

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt$$

Persamaan diatas dapat diintegralkan secara parsial dengan memisalkan :
$u = e^{-st} \quad dan \quad dv = df(t)$ kemudian disisipkan ke dalam persamaan :

$$\int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

Karena $du = \ -se^{-st}\ dan\ v = f(t)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = [e^{-s\infty}f(\infty) - e^{-s0}f(0)] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = -f(0) + sF(s)$$

$maka\ dapat\ disimpulkan\ bahwa$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Untuk turunan berikutnya

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{d}{dt}f(0) - \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0)$$

6. Integral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\right]e^{-st}dt$$

Dengan integral parsial diperoleh :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \left[\int_0^t f(t)\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = -\left[\int_0^t f(t)\right]\frac{1}{-s}\Bigg|_{t=0} - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}f^{-1}(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Maka :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0)$$

Sifat Transformasi Laplace

No	$Sifat - sifat$
1	$\mathcal{L}[Af(t)] = AF(s)$
2	$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3	$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s+\alpha)$
4	$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$
5	$\mathcal{L}\left[f(\frac{t}{\alpha})\right] = \alpha F(s)$
6	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$
7	$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt} f(t)\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt} f(0)$
8	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{d}{dt} f(0) - \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0)$
9	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0)$

Contoh Soal :

a. $Tentukan\ transformasi\ laplace\ dari\ f(t) = t - 3e^{-2t}$
$solusi$

$$\mathcal{L}[t - 3e^{-2t}] = \mathcal{L}[t] - 3\mathcal{L}[e^{-2t}]$$

$$= \frac{1}{s^2} - 3\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s+2}$$

$$= \frac{s + 2 - 3s^2}{s^2(s+2)}$$

$$= \frac{-3s^2 + s + 2}{s^2(s+2)}$$

b. $Tentukan\ transformasi\ laplace\ dari\ f(t) = 2t^2$

$$\mathcal{L}[2t^2] = 2\mathcal{L}[t^2]$$

$$= 2\left(\frac{2!}{s^{(2+1)}}\right)$$

$$= \frac{4}{s^3}$$

c. $Dengan\ menggunakan\ sifat\ transformasi\ laplace$
$Tentukan\ transformasi\ laplace\ dari\ f(t) = e^{-2t}\sin(3t)$
$gunakan\ sifat\ \mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha)$

$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin(3t)], \qquad dimana\ f(t) = \sin(3t)$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin(3t)] = \frac{3}{s+9}$$

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin(3t)] = F(s+2) = \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$= \frac{3}{s^2+4s+13}$$

d. Jika diketahui

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$$

$Dengan\ menggunakan\ sifat\ diferensial$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$Tentukan\ transformasi\ laplace\ dari\ 2e^{-2t}$

Solusi:

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}) = -2e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(e^{-2t})\right] = \mathcal{L}[-2e^{-2t}]$$

$$\mathcal{L}[2e^{-2t}] = -\mathcal{L}[-2e^{-2t}] = -\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(e^{-2t})\right]$$

$$= -[s(\mathcal{L}[e^{-2t}]) - f(0)] \qquad dimana\ f(t) = e^{-2t}$$

$$= -\left[s\left(\frac{1}{s+2}\right) - e^{-2(0)}\right]$$

$$= -\left[s\left(\frac{1}{s+2}\right) - 1\right] = -\left[\frac{s}{s+2} - \frac{s+2}{s+2}\right] = -\left[\frac{-2}{s+2}\right] = \frac{2}{s+2}$$