

TUGAS

MATAKULIAH ALJABAR LINIER DAN MatriK



Disusun Oleh :

- | | |
|-------------|------|
| 1. NIM..... | NAMA |
| 2. NIM..... | NAMA |
| 3. NIM..... | NAMA |

**PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA S-1
FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS DIAN NUSWANTORO
SEMARANG
OKTOBER, 2017**

MATRIK, DETERMINANT DAN INVERS

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ maka bentuk yang paling sederhana dari $(2A+C^T) - (3A^T+4B)$ adalah

[Kunci : $(2A + C^T) - (3A^T + 4B) = \begin{bmatrix} 0 & -27 \\ -10 & -24 \end{bmatrix}$]

2. Diketahui $K = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 5 & 4 & b \\ 8 & 3c & 11 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 21 \\ 8 & 4b & 11 \end{bmatrix}$ jika $K=L$ maka $c^2 + 4b - a = \dots$

[Kunci : $a = 6$ $b=21$ $c=28$, maka $c^2 + 4b - a = 862$]

3. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{bmatrix}$ jika $A = 2B^T$ maka : $a+b+c = \dots$

[Kunci : $a = 2$ $b=5$ $c=8$, maka $a+b+c = 15$]

4. Tentukan matrik X, sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

[Kunci : $X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 10 \\ 9 & -12 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$]

5. Diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & 7+x & -3 \\ 0 & 4 & x \end{bmatrix}$,

Tentukan semua nilai x agar matrik A

(a) Invertible [$\det(A) \neq 0$] (b) not Invertible [$\det(A) = 0$]

[kunci: (a) untuk semua nilai x matrik A invertible, kecuali $x = -3$ atau $x = -4$.]

[kunci: (b) untuk nilai $x = -3$ atau $x = -4$ matrik A Not invertible]

6. Diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} a^2 & 1 \\ 4a & 16 \end{bmatrix}$, tentukan semua nilai 'a' agar A menjadi matrik 'not invertible' (determinant A = 0).

[Kunci : $a = 0$, atau $a = \frac{1}{4}$]

7. Hitung determinan dari matrik A berikut menggunakan operasi baris elementer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[Kunci : $|A| = 5$]

8. Hitung determinan dari matrik A berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

[Kunci : $\det(A) = 39$]

9. Tentukan matrik A, jika

$$(5A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

[Kunci : $A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$]

10. Diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

Jika $\det(A) = 5$, hitunglah

(a) $\det(3A^{-1}) + \det[(3A)^{-1}] + \det(2A)$

(b) $\det(A^t) \cdot \det(A) + 4 \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$

11. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, tentukan invers A menggunakan metode matrik elementar.

[Kunci : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$]

12. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ tentukan invers A menggunakan metode matrik elementar.

[Kunci : $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$]

13. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, tentukan invers A menggunakan metode matrik elementar.

[Kunci : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$]

14. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan invers A menggunakan metode matrik elementar.

[Kunci : $A^{-1} = \begin{bmatrix} 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 5/4 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$]

15. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, tentukan invers A menggunakan metode matrik elementar.

[Kunci : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, A matrik singular (Tidak punya invers)]

APLIKASI MATRIK PADA KRIPTOGRAFI

14. TOYES adalah mahasiswa Teknik Informatika UDINUS mengirim pesan pada pacarnya SANTI menggunakan kata kunci: JAMU. Jika pesan yang diterima SANTI adalah “W X O D W F J I E D W N O T”, tentukan isi pesan rahasia yang dikirim oleh TONI bila menggunakan modulo 26.

SISTEM PERSAMAAN LINIER

Solusi sistem persamaan linier (SPL) ada 3 kemungkinan, yaitu

1. mempunyai solusi tunggal (satu solusi), jika SPL tersebut konsisten
2. mempunyai banyak solusi, jika SPL tersebut konsisten (*consistent*)
3. Tidak punya solusi, jika SPL tersebut tidak konsisten (*inconsistent*)

Contoh 1:

Tentukan solusi persamaan linier berikut,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10\end{aligned}$$

Solusi: Matrik Augmented

STEP 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ B_2+B_1 \\ B_3-3B_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ B_2 \times (-1) \\ B_3 - 10B_2 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array} \right] B_3/(-52)$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Maka bentuk persamaannya menjadi,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_2 - 5x_3 &= -9 \\ x_3 &= 2\end{aligned}$$

STEP 2. Substitusi balik

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = 5x_3 - 9 = 10 - 9 = 1$$

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 + 8 = -1 - 4 + 8 = 3$$

solusinya adalah $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Contoh 2:

Tentukan solusi persamaan linier berikut,

$$x - y + 2z - w = -1$$

$$2x + y - 2z - 2w = -2$$

$$-x + 2y - 4z + w = 1$$

$$3x \qquad -3w = -3$$

Solusi:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ B_2 - 2B_1 \\ B_3 + B_1 \\ B_4 - 3B_1 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ B_2/3 \\ \\ B_4/3 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ B_3 - B_2 \\ B_4 - B_2 \end{array}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Bentuk persamaannya adalah

$$x - y + 2z - w = -1$$

$$y - 2z = 0$$

Misalkan $z = s$ dan $w = t$, dimana s and t adalah bilangan real, maka

$$z = s$$

$$w = t,$$

$$y = 2s$$

$$x = t - 1$$

jadi SPL ini mempunyai banyak solusi.

Contoh 3.

Tentukan solusi persamaan linier berikut,

$$x - 2y + z - 4u = 1$$

$$x + 3y + 7z + 2u = 2$$

$$x - 12y - 11z - 16u = 5$$

Jawab:

Matrik Augmented:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} B_2 - B_1 \\ B_3 - B_1 \end{array}$$

Gunakan Operasi Baris Elementer (OBE)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -10 & -12 & -12 & 4 \end{bmatrix} B_3 + 2B_2$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Persamaan terakhir adalah:

$$0x + 0y + 0z + 0u = 6$$

$$\text{te tapi } 0 \neq 6$$

Jadi, SPL ini tidak mempunyai solusi (inkonsisten).

Contoh 4. Berapa nilai 'a' agar SPL ini,

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$3x - y + 5z = 2$$

$$4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2$$

- (i) mempunyai banyak solusi.
- (ii) Tidak punya solusi.
- (iii) Mempunyai satu solusi.

Solusi:

Matrik Augmented :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & \\ 3 & -1 & 5 & 2 & B_2 - 3B_1 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 & B_3 - 4B_1 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & \\ 0 & -7 & 14 & -10 & B_2 / (-7) \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 & B_3 - B_2 \end{array} \right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} & \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 & \end{array} \right]$$

Tulis Dalam Bentuk Persamaan,

$$x + 2y - 3z = 4 \quad (1)$$

$$y - 2z = \frac{10}{7} \quad (2)$$

$$(a^2 - 16)z = a - 4 \quad (3)$$

persamaan(3) bisa ditulis sebagai

$$(a + 4)(a - 4)z = a - 4$$

KASUS I.

Pers(3)

$$a = 4 \Rightarrow 0 = 0$$

Pers(1) dan (2)

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$y - 2z = \frac{10}{7}$$

misalkan $z = t$
 $y = \frac{10}{7} + 2t$
 $x = 4 + 3t - 4t - \frac{20}{7} = -t + \frac{8}{7}$

Dimana 't' adalah bilangan real sembarang.
 Jadi, SPL ini mempunyai banyak solusi.

KASUS II

$a = -4 \Rightarrow 0 = -8$ tidak konsisten
 Jadi dalam hal ini SPL tidak punya solusi

KASUS III

$a \neq 4, a \neq -4$, misalkan $a = 1$

pers.3. $\Rightarrow (1-4)(1+4)z = 1-4$
 $-15z = -3$
 $z = \frac{1}{5}$

$y = \frac{10}{7} + \frac{2}{5} = \frac{64}{35}$
 $x = 4 + \frac{3}{5} - 2(\frac{64}{35}) = \frac{47}{35}$

SPL mempunyai solusi tunggal bila $a \neq 4$ dan $a \neq -4$
 dan untuk $a=1$ solusinya adalah

$x = \frac{47}{35}, y = \frac{64}{35}$ dan $z = \frac{1}{5}$.

- Jadi : (i) $a=-4$, tidak punya solusi,
 (ii) $a=4$, punya bannyak solusi
 (iii) $a \neq 4, a \neq -4$, punya solisi tunggal .

15. Diketahui dua buah matrik A dan B berikut,

$$A = \begin{bmatrix} x+3y+z & 2x+3y+4z \\ 4x+3y+5z & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -y-z & 8-x-y-2z \\ -x-y-z & 3x+4y+6z \end{bmatrix}$$

Gunakan metode Gauss Jordan untuk mendapatkan nilai x, y dan z sedemikian hingga A dan B sama.

[Kunci : $x = -4, y = -1, z = 4$]

16. Selesaikan system persamaan linier berikut menggunakan kaidah Cramer.

$$4x + 5y = 2$$

$$11x + y + 2z = 3$$

$$x + 5y + 2z = 1$$

[Kunci : $x = \frac{3}{11}, y = \frac{2}{11}, z = -\frac{1}{11}$]

17. Diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$

Selesaikan persamaan berikut, $AX^T = 3X^T + 2B^T$ untuk mendapatkan nilai x , y , dan z .

[Kunci : $x = 11,5, y = 12, z = -3,5$]

18. diketahui persamaan linier berikut

$$x + y + 2z = a$$

$$x + z = b$$

$$2x + y + 3z = c$$

Tentukan a , b , dan c agar persamaan tersebut konsisten.

[Kunci : $c - b = 2a$]

19. Untuk nilai λ berapa sistem persamaan linier berikut

$$x + (\lambda - 1)y = 0$$

$$(\lambda - 1)x + y = 0$$

a) Mempunyai solusi unik (solusi tunggal)

b) Mempunyai solusi banyak

[Kunci : a) $\lambda \neq 0$ dan $\lambda \neq -2$ b) $\lambda = 0$ dan $\lambda = -2$]

20. Untuk nilai λ berapa sistem persamaan linier berikut

$$3x + \lambda z = 2$$

$$3x + 3y + 4z = 4$$

$$3y + 2z = \lambda$$

a) Mempunyai solusi unik (solusi tunggal) (petunjuk $\det(A) \neq 0$)

b) Mempunyai solusi banyak (petunjuk $\det(A) = 0$)

c) Tidak mempunyai solusi (gunakan OBE)

[Kunci : a) $\lambda \neq 2$ b) $\lambda = 2$ c) $Z = 0$]

21. Diketahui system persamaan linier berikut

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 = -2$$

$$4x_1 - 3x_3 = 0$$

- (a) Tulislah system persamaan linier tersebut dalam bentuk $AX=B$
(b) Tentukan A^{-1} menggunakan operasi baris elementer
(c) Gunakan A^{-1} untuk menyelesaikan system persamaan linier tersebut

22. Tentukan nilai y menggunakan kaidah *Cramer* untuk system persamaan linier berikut

$$2w + x + y + z = 4$$

$$x - y + z = 1$$

$$w - 2y = 2$$

$$2x + 4y = 3$$

23. Diketahui system persamaan linier berikut

$$5x + y - 2z = -7$$

$$-2x + 3y + 4z = 6$$

$$3x + 2y + 6z = 3$$

- (a) Tulislah system persamaan linier tersebut dalam bentuk $AX=B$
(b) Tentukan A^{-1} menggunakan operasi baris elementer
(c) Gunakan A^{-1} untuk menyelesaikan system persamaan linier tersebut

24. Selesaikan system persamaan linier berikut

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$$

$$5x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 13x_4 = 7$$

$$-x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -1$$