# ALJABAR BOOLE

# PENDAHULUAN

- Pada tahun 1849, George Boole mempublikasikan skema aljabar untuk mendeskripsikan proses yang berhubungan dengan pendekatan logika.
- Selanjutnya aljabar ini populer sebagai aljabar boole.
- Pada awal tahun 1930 Claude Shannon menunjukkan bahwa aljabar boole mampu digunakan untuk deskripsi rangkaian logika.
- Pada bagian ini akan ditunjukkan kegunaan aljabar boole dalam hal desain dan analisis rangkaian logika.

# Aksioma dalam Aljabar Boole

$$1a.\ \ 0 \cdot 0 = 0$$
$$1b.\ \ 1 + 1 = 1$$

$$2a.\ \ 1 \cdot 1 = 1$$
$$2b.\ \ 0 + 0 = 0$$

$$3a.\ \ 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$
$$3b.\ \ 1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$4a.$ Jika x = 0, maka $\bar{x} = 1$

$4b.$ Jika x = 1, maka $\bar{x} = 0$

# Teorema Variable Tunggal

$$5a.\ \ x \cdot 0 = 0$$

$$5b.\ \ x + 1 = 1$$

$$6a.\ \ x \cdot 1 = x$$

$$6b.\ \ x + 0 = x$$

$$7a.\ \ x \cdot x = x$$

$$7b.\ \ x + x = x$$

$$8a.\ \ x \cdot \overline{x} = 0$$

$$8b.\ \ x + \overline{x} = 1$$

$$9.\ \ \overline{\overline{x}} = x$$

# Prinsip Dualitas Aljabar Boole

- Dualitas Ekspresi Boolean diperoleh dengan mengganti operator AND dengan ekivalen operator OR, dan operator OR dengan ekivalen operator AND, bit '0' dengan ekivalen bit '1', dan bit '1' dengan bit '0'.
- Prinsip ini akan berguna dalam manipulasi aljabar boole dalam penyederhanaan rangkaian logika.

# SIFAT DUA dan TIGA VARIABLE (1)

$$\left.\begin{array}{ll} 10a. & x \cdot y = y \cdot x \\ 10b. & x + y = y + x \end{array}\right\} \quad \textbf{Commutative}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 11a. & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ 11b. & x + (y + z) = (x + y) + z \end{array}\right\} \quad \textbf{Associative}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 12a. & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ 12b. & x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \end{array}\right\} \quad \textbf{Distributive}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 13a. & x + x \cdot y = x \\ 13b. & x \cdot (x + y) = x \end{array}\right\} \quad \textbf{Absorptive}$$

# SIFAT DUA dan TIGA VARIABLE (2)

$14a.\ \ \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \mathrm{x} \cdot \quad = \ \mathrm{x}\ \overline{y}$

$14b.\ (\mathrm{x} + \mathrm{y})\ .\ (\mathrm{x} + \quad) = \mathrm{x} \quad \overline{y}$

**Combining**

$15a.$

$$\overline{x\,.\,y} = \overline{x} + \overline{y}$$

$15b.$

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

**Teorema DeMorgan**

# EKIVALEN SIMBOL

$$\overline{X} = X'$$

$$\overline{\overline{X}} = (X')'$$

**Contoh Pembuktian Teorema Aljabar Boole Berdasarkan Aksioma Dan Teorema Variable Tunggal :**

1. **Buktikan teorema :** $X \cdot Y + X \cdot Y' = X$

**Sifat Distributive :** $X \cdot Y + X \cdot Y' = X \cdot (Y + Y')$

**Sifat Komplemen :** $X \cdot (Y + Y') = X \cdot (1)$

**Sifat Identitas :** $X \cdot (1) = X$

2. **Buktikan teorema :** $X + X \cdot Y = X$

***Sifat Identitas*** $X + X \cdot Y = X \cdot 1 + X \cdot Y$

***Sifat distributive*** $X \cdot 1 + X \cdot Y = X \cdot (1 + Y)$

***identitas*** $X \cdot (1 + Y) = X \cdot (1)$

***identitas*** $X \cdot (1) = X$

# TEOREMA DeMorgan

$$(X + Y)' = X' \cdot Y'$$

**Gerbang NOR equivalent dengan Gerbang AND yang inputnya dikomplemen**

| X | Y | $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | $\overline{X+Y}$ | $\overline{X}\bullet\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$(X \cdot Y)' = X' + Y'$$

**Gerbang NAND equivalent dengan Gerbang OR yang inputnya dikomplemen**

| X | Y | $\overline{X}$ | $\overline{Y}$ | $\overline{X\bullet Y}$ | $\overline{X}+\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Teorema DeMorgan dapat digunakan mengkonversi pernyataan AND/OR menjadi pernyataan OR/AND**

**Contoh:**

$$Z = A' \cdot B' \cdot C + A' \cdot B \cdot C + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C'$$

$$Z' = (A + B + C') \cdot (A + B' + C') \cdot (A' + B + C') \cdot (A' + B' + C)$$

# TABEL KEBENARAN (TRUTH TABLE)

**Suatu Tabel Kebenaran dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi Boolean**

**Sebuah tabel kebenaran dapat dinyatakan dalam dua bentuk fungsi boolean yang ekivalen**

**Fungsi-fungsi persamaan yang diperoleh dari suatu tabel kebenaran disebut sebagai "*<u>canonical form" ( bentuk2 Canonic).</u>***

***Sum of Products Form***

**Disebut juga disjunctive normal form, merupakan ekspansi Bagian minterm tabel kebenaran**

| A | B | C | F | $\overline{F}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$F = \underbrace{A'\,B\,C}_{011} + \underbrace{A\,B'\,C'}_{100} + \underbrace{A\,B'\,C}_{101} + \underbrace{A\,B\,C'}_{110} + \underbrace{A\,B\,C}_{111}$$

$$F' = A'\,B'\,C' + A'\,B'\,C + A'\,B\,C'$$

# CANONICAL SUM of PRODUCT (SoP)

***Sum of Products***

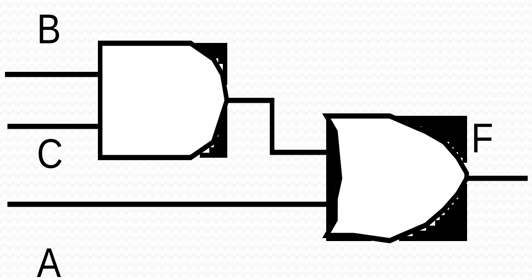
| A | B | C | Minterms |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$ |
| 0 | 0 | 1 | $\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$ |
| 0 | 1 | 0 | $\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$ |
| 0 | 1 | 1 | $\overline{A}\,B\,C = m_3$ |
| 1 | 0 | 0 | $A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$ |
| 1 | 0 | 1 | $A\,\overline{B}\,C = m_5$ |
| 1 | 1 | 0 | $A\,B\,\overline{C} = m_6$ |
| 1 | 1 | 1 | $A\,B\,C = m_7$ |

***F dalam bentuk SoP :***

$$F(A,B,C) = \Sigma m(3,4,5,6,7)$$
$$= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$
$$= A'\,B\,C + A\,B'\,C' + A\,B'\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C$$

***Penyederhanaan dengan Aljabar Boole :***

$$F = A\,B'\,(C + C') + A'\,B\,C + A\,B\,(C' + C)$$
$$= A\,B' + A'\,B\,C + A\,B$$
$$= A\,(B' + B) + A'\,B\,C$$
$$= A + A'\,B\,C = A\,(1 + BC) + A'BC$$
$$= A + ABC + A'BC = A + (A + A')BC$$
$$= A + B\,C$$




**Realisasi Hasil Penyederhanaan Fungsi SoP**

# PERNYATAAN CANONICAL PRODUCT of SUM (PoS)

***Product of Sums / Conjunctive Normal Form / Maxterm Expansion***

| A | B | C | Maxterms |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $A + B + C = M_0$ |
| 0 | 0 | 1 | $A + B + \overline{C} = M_1$ |
| 0 | 1 | 0 | $A + \overline{B} + C = M_2$ |
| 0 | 1 | 1 | $A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$ |
| 1 | 0 | 0 | $\overline{A} + B + C = M_4$ |
| 1 | 0 | 1 | $\overline{A} + B + \overline{C} = M_5$ |
| 1 | 1 | 0 | $\overline{A} + \overline{B} + C = M_6$ |
| 1 | 1 | 1 | $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = M_7$ |

***Bentuk Maxterm :***

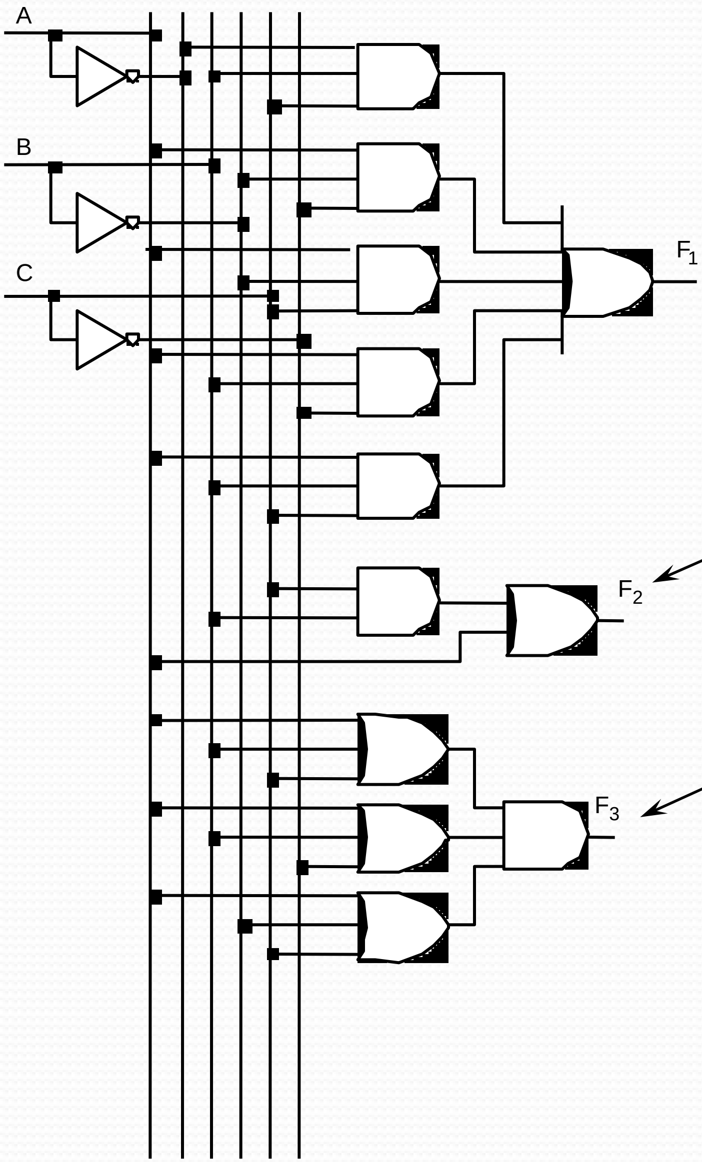
**Tentukan baris pada tabel kebenaran Dengan F = 0.**
**'0' pada kolom input merupakan notasi Masukan tanpa komplemen.**
**'1' pada kolom input merupakan notasi Masukan dengan komplemen.**

**Hasil pembacaan fungsi boolean PoS berdasarkan tabel kebenaran :**

$$F(A,B,C) = \Pi M(0,1,2)$$
$$= (A + B + C)\ (A + B + C')\ (A + B' + C)$$

$$F'(A,B,C) = \Pi M(3,4,5,6,7)$$
$$= (A + B' + C')\ (A' + B + C)\ (A' + B + C')\ (A' + B' + C)\ (A' + B' + C')$$

# PERBANDINGAN HASIL REALISASI




**Canonical Sum of Products**

**Minimized Sum of Products**

**Canonical Products of Sums**