RANGKAIAN LOGIKA DIGITAL

2SKS Teori

Dedi Nurcipto,MT

Universitas Dian Nuswantoro Semarang

Apakah Aljabar Boolean ITU?

Merupakan cabang ilmu aljabar yang mempelajari masalah perhitungan yang khusus menggunakan angka 0 dan 1 dan menyarankan cara paling efisien untuk menemukan solusinya.

- Menggunakan angka 0 dan 1, berarti menggunakan system bilangan binary.
- Perlu menyegarkan pengertian tentang AND, OR dan Komplemen.

PENDAHULUAN

- Pada tahun 1849, George Boole mempublikasikan skema aljabar untuk mendeskripsikan proses yang berhubungan dengan pendekatan logika.
- Selanjutnya aljabar ini populer sebagai aljabar boole.
- Pada awal tahun 1930 Claude Shannon menunjukkan bahwa aljabar boole mampu digunakan untuk deskripsi rangkaian logika.
- Pada bagian ini akan ditunjukkan kegunaan aljabar boole dalam hal desain dan analisis rangkaian logika.

Hukum-hukum dalam Aljabar Boolean

Hukum Identitas $A + 0 = A$ $A \cdot 1 = A$	Hukum Komutatif $A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$
Hukum Idempoten $A + A = A$ $A \cdot A = A$	Hukum Asosiatif $A + (B + C) = (A + B) + C$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
Hukum Komplemen $A + A' = 1$ $A \cdot A' = 0$	Hukum Distributif $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Hukum Dominansi $A \cdot 0 = 0$ $A + 1 = 1$	Hukum De Morgan $(A + B)' = A' \cdot B'$ $(A \cdot B)' = A' + B'$
Hukum Involusi $A'' = A$	Hukum 0/1 $0' = 1$ $1' = 0$
Hukum Penyerapan $A + AB = A$ $A (A + B) = A$	

Hukum Identitas

A	B	C
Hukum Identitas A + 0 = A		
A	A + 0	
0	0	
1	1	
terbukti bahwa A+0=A		
Hukum Identitas A . 1 = A		
A	A . 1	
0	0	
1	1	
terbukti bahwa A.1=A		

Hukum Idempoten

Hukum Idempoten A + A = A

A	A + A
0	0
1	1

terbukti bahwa A+A=A

Hukum Idempoten A . A = A

A	A . A
0	0
1	1

terbukti bahwa A.A=A

Hukum Komplemen

Hukum Komplemen A + A' = 1		
A	A'	A + A'
0	1	1
1	0	1
terbukti bahwa A+A'=1		

Hukum Komplemen A . A' = 0		
A	A'	A . A'
0	1	0
1	0	0
terbukti bahwa A.A'=0		

Hukum Dominasi

Hukum Dominasi A . 0 = 0

A	A . 0
0	0
1	0

terbukti bahwa A.0=0

Hukum Dominasi A + 1 = 1

A	A + 1
0	1
1	1

terbukti bahwa A+1=1

Hukum Involusi

A	B	C
Hukum Involusi A'' = A		
A	A'	A''
0	1	0
1	0	1
terbukti bahwa A''=A		

Hukum Penyerapan

Hukum Penyerapan A + AB = A			
A	B	AB	A + AB
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1
terbukti bahwa A + AB = A			

Hukum Penyerapan A (A + B) = A			
A	B	A + B	A (A + B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1
terbukti bahwa A (A + B) = A			

HUKUM KOMUTATIF

HUKUM KOMUTATIF								
A	B	A+B	B+A		A	B	A*B	B*A
0	0	0	0		0	0	0	0
0	1	1	1		0	1	0	0
1	0	1	1		1	0	0	0
1	1	1	1		1	1	1	1
TERBUKTI A+B SAMA DGN B+A					TERBUKTI A*B SAMA DGN B*A			

HUKUM ASOSIATIF

HUKUM ASOSIATIF

A	B	C	A+B	B+C	A+(B+C)	(A+B)+C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

TERBUKTI A+(B+C) SAMA DENGAN (A+B)+C

A	B	C	A+B	B*C	A*(B*C)	(A*B)*C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

TERBUKTI A*(B*C) SAMA DENGAN (A*B)*C

HUKUM DISTRIBUTIF

HUKUM DISTRIBUTIF							
A	B	C	(B*C)	(A+B)	(A+C)	A+(B*C)	(A+B)*(A+C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
TERBUKTI A+(B*C) SAMA DENGAN (A+B)*(A+C)							

HUKUM DE MORGAN

HUKUM DE MORGAN						
A	B	A'	B'	(A+B)	(A+B)'	A'*B'
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
TERBUKTI (A+B)' SAMA DENGAN A'*B'						

A	B	A'	B'	(AB)'	A'+B'
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0
TERBUKTI (AB)' SAMA DENGAN A'+B'					

Aksioma dalam Aljabar Boole

$1a.\ \ 0 \cdot 0 = 0$

$1b.\ \ 1 + 1 = 1$

$2a.\ \ 1 \cdot 1 = 1$

$2b.\ \ 0 + 0 = 0$

$3a.\ \ 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

$3b.\ \ 1 + 0 = 0 + 1 = 1$

$4a.$ Jika x = 0, maka $\overline{x} = 1$

$4b.$ Jika x = 1, maka $\overline{x} = 0$

EKIVALEN SIMBOL

$$\overline{X} = X'$$

$$\overline{\overline{X}} = (X')'$$

Contoh Pembuktian Teorema Aljabar Boole Berdasarkan Aksioma Dan Teorema Variable Tunggal :

1. **Buktikan teorema :** $X \cdot Y + X \cdot Y' = X$

   Sifat Distributive : $X \cdot Y + X \cdot Y' = X \cdot (Y + Y')$

   Sifat Komplemen : $X \cdot (Y + Y') = X \cdot (1)$

   Sifat Identitas : $X \cdot (1) = X$

2. **Buktikan teorema :** $X + X \cdot Y = X$

   Sifat Identitas $X + X \cdot Y = X \cdot 1 + X \cdot Y$

   Sifat distributive $X \cdot 1 + X \cdot Y = X \cdot (1 + Y)$

   identitas $X \cdot (1 + Y) = X \cdot (1)$

   identitas $X \cdot (1) = X$

TEOREMA DeMorgan

$$(X + Y)' = X' \cdot Y'$$

Gerbang NOR equivalent dengan Gerbang AND yang inputnya dikomplemen

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X+Y}$	$\overline{X} \bullet \overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

$$(X \cdot Y)' = X' + Y'$$

Gerbang NAND equivalent dengan Gerbang OR yang inputnya dikomplemen

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X \bullet Y}$	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0

Teorema DeMorgan dapat digunakan mengkonversi pernyataan AND/OR menjadi pernyataan OR/AND

Contoh:

$$Z = A' \cdot B' \cdot C + A' \cdot B \cdot C + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C'$$

$$Z' = (A + B + C') \cdot (A + B' + C') \cdot (A' + B + C') \cdot (A' + B' + C)$$

TABEL KEBENARAN (TRUTH TABLE)

Suatu Tabel Kebenaran dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi Boolean

Sebuah tabel kebenaran dapat dinyatakan dalam dua bentuk fungsi boolean yang ekivalen

Fungsi-fungsi persamaan yang diperoleh dari suatu tabel kebenaran disebut sebagai "*canonical form" (bentuk2 Canonic).*

Sum of Products Form

Disebut juga disjunctive normal form, merupakan ekspansi Bagian minterm tabel kebenaran

A	B	C	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$$F = \underset{011}{A'BC} + \underset{100}{AB'C'} + \underset{101}{AB'C} + \underset{110}{ABC'} + \underset{111}{ABC}$$

$$F' = A'B'C' + A'B'C + A'BC'$$

CANONICAL SUM of PRODUCT (SoP)

Sum of Products

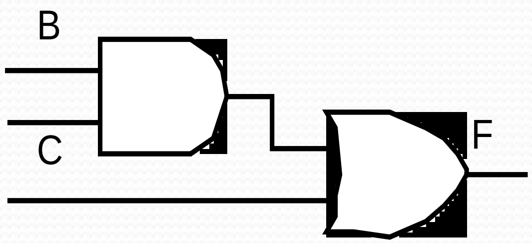
A	B	C	Minterms
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$
0	1	0	$\overline{A}\,B\,\overline{C} = m_2$
0	1	1	$\overline{A}\,B\,C = m_3$
1	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C} = m_4$
1	0	1	$A\,\overline{B}\,C = m_5$
1	1	0	$A\,B\,\overline{C} = m_6$
1	1	1	$A\,B\,C = m_7$

F dalam bentuk SoP :

$$F(A,B,C) = \Sigma m(3,4,5,6,7)$$
$$= m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$
$$= A'\,B\,C + A\,B'\,C' + A\,B'\,C + A\,B\,C' + A\,B\,C$$

Penyederhanaan dengan Aljabar Boole :

$$F = A\,B'\,(C + C') + A'\,B\,C + A\,B\,(C' + C)$$
$$= A\,B' + A'\,B\,C + A\,B$$
$$= A\,(B' + B) + A'\,B\,C$$
$$= A + A'\,B\,C = A\,(1+BC) + A'BC$$
$$= A + ABC + A'BC = A + (A+A')BC$$
$$= A + B\,C$$



Realisasi Hasil Penyederhanaan Fungsi SoP

PERNYATAAN CANONICAL PRODUCT of SUM (PoS)

Product of Sums / Conjunctive Normal Form / Maxterm Expansion

A	B	C	Maxterms
0	0	0	$A + B + C = M_0$
0	0	1	$A + B + \overline{C} = M_1$
0	1	0	$A + \overline{B} + C = M_2$
0	1	1	$A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$
1	0	0	$\overline{A} + B + C = M_4$
1	0	1	$\overline{A} + B + \overline{C} = M_5$
1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} + C = M_6$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = M_7$

Bentuk Maxterm :

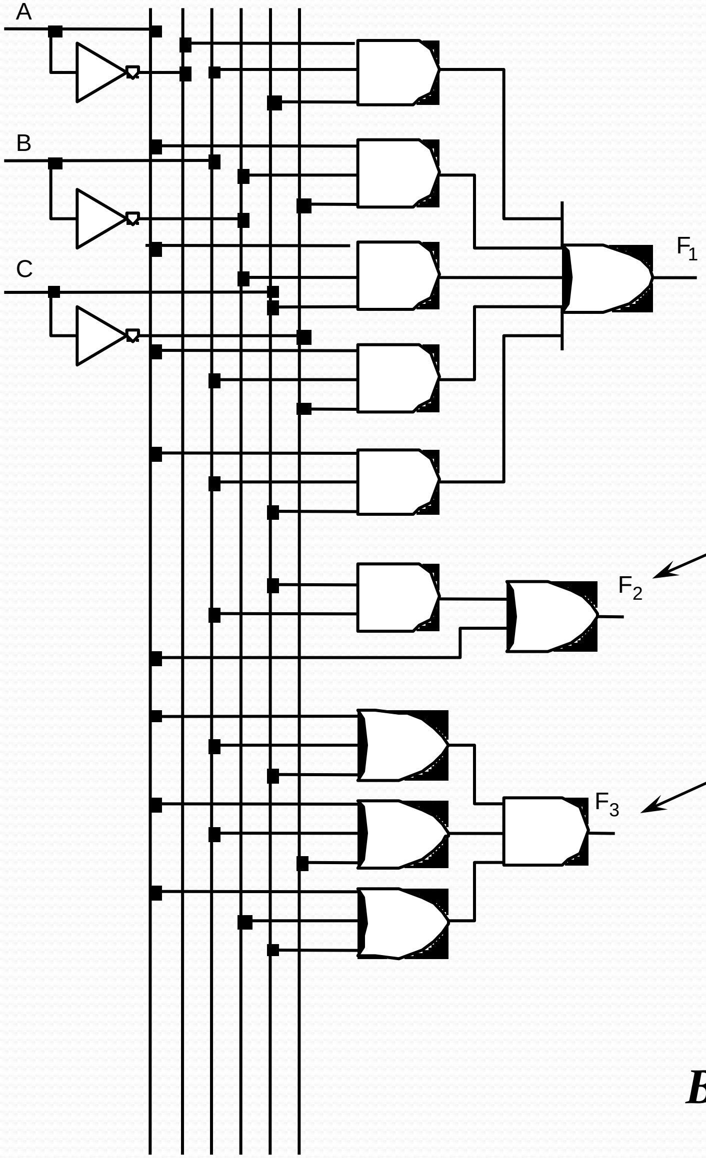
Tentukan baris pada tabel kebenaran Dengan F = 0.
'0' pada kolom input merupakan notasi Masukan tanpa komplemen.
'1' pada kolom input merupakan notasi Masukan dengan komplemen.

Hasil pembacaan fungsi boolean PoS berdasarkan tabel kebenaran :

$$F(A,B,C) = \Pi M(0,1,2)$$
$$= (A + B + C)\ (A + B + C')\ (A + B' + C)$$

$$F'(A,B,C) = \Pi M(3,4,5,6,7)$$
$$= (A + B' + C')\ (A' + B + C)\ (A' + B + C')\ (A' + B' + C)\ (A' + B' + C')$$

PERBANDINGAN HASIL REALISASI



Canonical Sum of Products

Minimized Sum of Products

Canonical Products of Sums

Buat tabel keberan

Terima Kasih