BAB 2
MATRIKS

BAB 2
MATRIKS

1. Pengertian Matriks
2. Operasi Matriks
3. Transpose Suatu Matriks
4. Kesamaan Duah Buah Matriks
5. Jenis-Jenis Matriks
6. Transformasi Elementer
7. Rank Matriks

1. Pengertian Matriks

Matriks adalah daftar bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan kolom yang dibatasi oleh kurung biasa atau kurung siku.

- Matriks dinotasikan dengan huruf kapital, misalnya A, B, C, ... , dst.
- Elemen atau unsur suatu matriks dilambangkan dengan huruf kecil.

- **Baris** dari suatu matriks adalah bagian susunan bilangan yang dituliskan **mendatar** atau **horisontal** dalam matriks.
- **Kolom** dari suatu matriks adalah bagian yang dituliskan **tegak** atau **vertikal** dalam matriks.
- **Elemen** atau **unsur** suatu matriks adalah bilangan-bilangan (real atau kompleks) yang menyusun matriks itu.

- Bentuk Umum Matriks:

$$A_{mxn} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i = 1,2,3, ... , m (baris)
j = 1,2,3, ..., n (kolom)
a_{11} = elemen baris pertama kolom pertama
a_{21} = elemen baris kedua kolom pertama
a_{32} = elemen baris ketiga kolom kedua, dst

- Dimensi/Ordo/Ukuran Matriks :

  Banyak baris dan kolom suatu matriks
- Matriks yang terdiri dari m baris dan n kolom disebut matriks berordo mxn

  Contoh:

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad C_{3x2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Operasi pada Matriks

2.1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan dan dikurangkan jika mempunyai ordo sama.
Misalkan :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Operasi pada Matriks (lanjutan)

Sifat Penjumlahan Matriks

1. A + B = B + A (Hukum Komutatif)
2. A + (B + C) = (A + B) + C (Hukum asosiatif)
3. A + 0 = 0 + A = A
4. A + (-A) = 0
5. k (A + B) = kA + kB

Operasi pada Matriks (lanjutan)

2.2. Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ maka $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

dimana k = skalar

Sifat perkalian skalar dengan matriks

- 1A = A
- 0A = 0
- k(A + B) = kA + kB
- (ck)A = c(kA)
- (c + k) A =cA + kA; (c,k = skalar)

Operasi pada Matriks (lanjutan)

2.3. Perkalian Matriks dengan Matriks

Jika A_{mxn} dan B_{nxp} maka AxB = C_{mxp} = c_{jxk} dimana :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{jl}\, b_{lk};\ j = 1,2,\cdots,m\ dan\ k = 1,2,\cdots,p$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

Sifat Perkalian Matriks

1. A x B ≠ B x A
2. A x (B x C) = (A x B) x C (Hukum asosiatif)
3. A x (B + C) = AB + AC (hukum distributif kiri)
4. (B + C) A = BA + CA (Hukum distributif kanan)
5. k x (AB) = (kA) x B = A x (kB) (k = konstanta)

3. Transpose Suatu Matriks

- A^t matriks transpose dari matriks A jika baris/kolom dari A menjadi kolom/baris dari A^t
- Aturan-aturan aljabar untuk transpose

  1. $(A^t)^t = A$
  2. $(cA)^t = cA^t$
  3. $(A + B)^t = A^t + B^t$
  4. $(AB)^t = B^tA^t$
- Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Kesamaan Dua Buah Matriks

- Matriks A = B jika dan hanya jika matriks A dan B mempunyai ordo yang sama serta unsur-unsur yang bersesuaian sama

  Misalkan : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

  A = B jika : $a_{11} = b_{11;}$ $a_{21} = b_{21;}$

  $a_{12} = b_{12;}$ $a_{22} = b_{22}$

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{pmatrix} dan\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Jika A = B Tentukan w,x, y,dan z

Jawab : x=2, y = 1, z = 3, dan w = -1

5. Jenis-Jenis Matriks

1. **Matriks Baris (Vektor Baris)**
   Matriks yang terdiri dari satu baris

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

2. **Matriks Kolom (Vektor Kolom)**
   Matriks yang terdiri dari satu Kolom

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

3. **Matriks Nol**
   Matriks yang semua elemennya nol

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (lanjutan)

4. Matriks Persegi
   Matriks yang banyak baris = banyak kolom

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Diagonal
   matriks persegi yang semua elemennya, kecuali elemen-elemen diagonal utama adalah nol.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Matriks Satuan atau Identitas (I)
   Matriks diagonal dimana unsur-unsur diagonal utamanya 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (lanjutan)

7. Matriks Segitiga

   Matriks segitiga adalah matriks persegi yang elemen – elemen di bawah atau di atas elemen diagonal bernilai nol.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   Matriks C disebut matriks segitiga atas
   Matriks D disebut matriks segitiga bawah.

8. Matriks Simetri

   Matriks A_{nxn} disebut simetris jika $A^t = A$

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Jenis-jenis Matriks (lanjutan)

9. Matriks Mendatar
   Matriks yang banyaknya baris kurang dari banyaknya kolom.

10. Matriks Tegak
    Matriks yang banyaknya baris lebih dari banyaknya kolom.

Latihan I

1. Tentukan jenis dari matriks – matriks dibawah ini (jika memenuhi lebih dari satu, tuliskan semua) !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   a. Hitung B + C !
   b. Hitung AB dan AC , kemudian tentukan AB + AC
   c. Dari perhitungan B + C sebelumya, hitung A (B + C) kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban dari b !

3. Dari soal nomor 2, tentukan
   a. $(AB)^t$ dan $(AC)^t$!
   b. Hitung B^tA^t dan C^tA^t, kemudian bandingkan hasilnya dengan jawaban a !

4. Carilah *x*, *y*, *z*, dan *w* dari $\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 6 & 2w \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$

6. Transformasi Elementer

1. Penukaran tempat baris/kolom
   a. Penukaran baris ke-i dgn baris ke-j, ditulis $H_{ij}(A)$
   b. Penukaran kolom ke-i dgn kolom ke-j, ditulis $K_{ij}(A)$
2. Mengalikan baris/kolom dengan Skalar λ
   a. Mengalikan baris ke-i dengan Skalar $\lambda \neq 0 \rightarrow H_i^{(\lambda)}(A)$
   b. Mengalikan kolom ke-i dengan Skalar $\lambda \neq 0 \rightarrow K_i^{(\lambda)}(A)$
3. Menambah baris/kolom dengan λ kali baris/kolom
   a. Menambah baris ke-i dng λ kali baris ke-j, $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$
   b. Menambah kolom ke-i dng λ kali kolom ke-j, $K_{ij}^{(\lambda)}(A)$

Penukaran Baris/Kolom

CONTOH :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$H_{12}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$K_{23}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Mengalikan Baris/Kolom dng Skalar

CONTOH :

$$H_2^{(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$K_1^{(3)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 6 \\ 21 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Menambah Baris ke-i dengan Skalar kali Baris ke-j

CONTOH :

$$H_{31}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+2\times 1 & 8+2\times 2 & 9+2\times 3 \end{bmatrix}$$

$$H_{31}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Menambah Kolom ke-i dengan Skalar kali Kolom ke-j

CONTOH :

$$K_{23}^{(3)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2+3\times 3 & 3 \\ 4 & 5+3\times 6 & 6 \\ 7 & 8+3\times 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$K_{23}^{(3)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 3 \\ 4 & 23 & 6 \\ 7 & 35 & 9 \end{bmatrix}$$

Contoh Lain :

$$H_{3}{}^{(3)}{}_{1}{}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3\cdot 7 + 2\cdot 1 & 3\cdot 8 + 2\cdot 2 & 3\cdot 9 + 2\cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$H_{3}{}^{(3)}{}_{1}{}^{(2)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 23 & 28 & 33 \end{bmatrix}$$

LATIHAN

Selesaikan dengan menggunakan metode transformasi elementer berdasarkan baris (H) menjadi Matriks Segitiga Bawah (**MSB**):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

7. Rank Matriks

Definisi :

Rank baris dari matriks A adalah dimensi dari ruang baris matriks A.

Rank kolom dari matriks A adalah dimensi dari ruang kolom matriks A.

Jika ternyata Rank Baris = Rank Kolom ditulis **r(A)**

Petunjuk menentukan Rank (Baris/Kolom):

1. Tentukan elemen Pivot (pada baris/kolom), untuk mempermudah pilih elemen 1 atau –1.
2. Jadikan nol semua elemen yang sekolom/sebaris dengan pivot tersebut.
3. Sekarang kita perlu perhatikan lagi baris /kolom yang tertinggal (tanpa baris atau kolom yang terdapat pivot):
    a. apabila tinggal dua baris/kolom yang tersisa maka tinggal diperiksa apakah baris/kolom tersebut kelipatan jika ya maka salah satu baris/kolom tersebut dapat dijadikan nol, jika tidak langkah selesai.
    b. apabila masih lebih dari dua baris/kolom lakukan lagi langkah 1 di atas sampai langkah 3.a.

Contoh :

$$\text{Cari rank matriks dari } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

LATIHAN

1. Cari rank matriks dari $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

2. Cari rank matriks dari $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3. Tentukan Rank dari matriks A berikut :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$