MATEMATIKA TEKNIK 1

Teknik Elektro Udinus – 3 SKS

2. LIMIT DAN KONTINUITAS

Limits and Continuity

- A brief Preview of Calculus: Tangent Lines and the Length of a Curve
- The concept of Limits
- Computation of Limits
- Continuity and its Consequences
- Limit involving Infinity; Asymptotes
- Formal definition of limit
- Limit and Loss-of-Significance Errors

Garis Tangen

- Misalkan diberikan suatu fungsi f(x), maka kemiringan garis tangen L di titik P(a, f(a)) pada kurva y=f(x) dapat diaproksimasi dengan kemiringan garis secant antara titik P dan titik Q(a+h, f(a+h)).

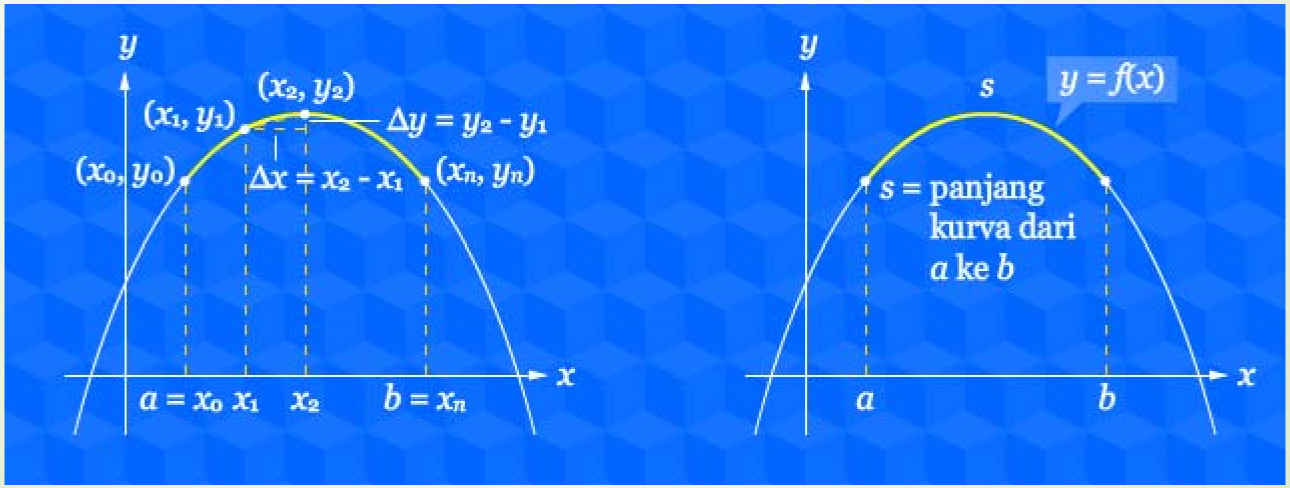
$$\boxed{m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (h \neq 0).}$$

- Bila Q dibuat mendekati *P* dgn menelusuri kurva *y=f(x)* dan *h* menuju 0, maka diperoleh **kemiringan garis tangen kurva *y=f(x)* di titik *P(a,f(a))*:**

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Panjang Kurva (Busur)

- Misalkan fungsi *y* = *f*(*x*) merupakan fungsi yang kontinu dan memiliki turunan pada interval [*a*, *b*].
- Fungsi *f* memiliki *f*' yang memiliki turunan di [*a*, *b*] dan memiliki grafik berupa kurva halus.
- Grafik dari fungsi *f* tersebut dapat ditaksir dengan menggunakan ruas garis-ruas garis yang titik-titik ujungnya ditentukan oleh partisi



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Panjang Kurva

- Dengan memisalkan $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ dan $\Delta y = y_i - y_{i-1}$, panjang ruas dari suatu grafik dapat diperkirakan sebagai berikut.

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i)$$

Panjang Kurva

- Perkiraan tersebut akan semakin baik dan baik apabila $||\Delta|| \to 0$ atau $n \to \infty$. Sehingga, panjang ruas dari grafik tersebut adalah

$$s = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} (\Delta x_i).$$

- Karena fungsi yang diberikan adalah fungsi yang memiliki turunan pada interval $[a, b]$, maka fungsi tersebut memiliki turunan di (x_{i-1}, x_i). Sehingga Teorema Nilai Rata-rata menjamin adanya c_i di (x_{i-1}, x_i) sedemikian sehingga,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i)$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

Panjang Kurva

- Karena $f\,'$ kontinu pada interval $[a, b]$ maka $\sqrt{(1 + [f\,'(c_i)]^2)}$ juga kontinu (sehingga memiliki integral) pada $[a, b]$, yang mengakibatkan

$$s = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(\Delta x_i)$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

- di mana s disebut panjang busur f antara a dan b.

Limit

Apa itu limit?

Arti kata:

- batas, membatasi, mempersempit, mendekatkan.

Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, orang sering dihadapkan pada masalah-masalah pendekatan suatu nilai/besaran.

Latar Belakang

Contoh:

a. Letak rumah Budi <u>dekat</u> dengan rumah Tono.
b. Ketika hari sudah <u>mendekati</u> senja, datanglah yang ditunggu-tunggu.
c. Nilai ujian matematika Anton <u>hampir</u> 9.
d. ……dst.

Pertanyaan:

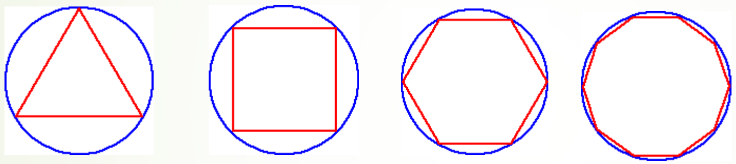
Seberapa dekat/mendekati/hampir besaran-besaran atau nilai-nilai pada contoh di atas dengan besaran/nilai yang sebenarnya?

Latar Belakang

Dari ketiga contoh tersebut, kita mungkin tidak mengetahui letak/berat/nilai yang sesungguhnya.

Latar Belakang (Contoh-contoh lain)

1. Perhatikan gambar berikut.



……. dst.

Di dalam lingkaran dibuat bidang segi *n* (*n* polygon) sehingga titik-titik sudut segi *n* tersebut berada pada lingkaran. Tentu dapat dibayangkan bahwa apabila *n* “sangat besar”, maka luas segi *n* akan mendekati luas lingkaran.

Contoh-contoh lain

2. Masalah penjumlahan:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\,\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}$$

Contoh-contoh lain

Apabila jumlahan dilakukan untuk *n* “sangat besar”, maka hasil jumlahan akan “mendekati” 1.

Contoh-contoh Lain

3. Masalah mekanika:

   Seseorang berangkat ke tempat kerja menggunakan sepeda motor, dari rumah pukul 07.00 sampai ke tempat kerja pukul 07.30. Jarak rumah ke tempat kerja 15 km. Orang tersebut mengendarai sepeda motor dengan kecepatan rata-rata

$$\frac{15}{07.30 - 07.00} = 30 \text{ km/jam}$$

Contoh-contoh lain

Secara umum, apabila pada pukul 07 lebih *t* menit, orang tersebut telah menempuh jarak x km, maka kecepatan rata-rata orang tersebut berkendaraan adalah

$$\frac{x}{t}\,\text{km/menit} = \frac{60.x}{t}\,\text{km/jam}$$

Contoh-contoh lain

Yang menjadi pertanyaan adalah berapa sesungguhnya kecepatan orang tersebut dalam berkendaaan ketika jam menunjukkan pukul 07 lebih *t* menit?

Pertanyaan ini sulit dijawab, karena nilai perbandingan jarak tempuh dan selang waktu, yaitu

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

menjadi mendekati 0/0. Namun demikian nilai pendekatannya dapat ditentukan.

Latar Belakang

Salah satu masalah utama di dalam kalkulus adalah nilai slope/kemiringan suatu garis , yaitu $\Delta y/\Delta x$

ketika nilai tersebut menjadi hampir 0/0.

Nilai eksak slope dengan kondisi seperti tersebut di atas sangat sulit ditentukan, namun nilai pendekatannya tidaklah sulit untuk ditentukan.

Proses menentukan nilai pendekatannya itulah yang menjadi ide dasar konsep limit.

Latar Belakang

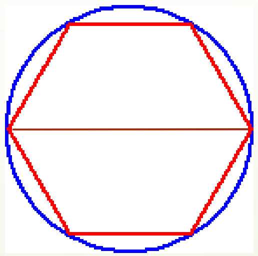
Perhatikan bahwa untuk berbagai nilai Δy dan Δx, maka nilai $\Delta y / \Delta x$ berupa bilangan rasional.

Oleh karena itu, ide dasar konsep limit tidak lain adalah barisan bilangan rasional.

Barisan Bilangan Rasional

Barisan bilangan rasional antara lain dapat ditemukan dalam geometri, yaitu ketika seseorang akan menentukan hasil bagi keliling sebarang lingkaran dengan diameternya (bilangan π).

Untuk mengetahui hasil bagi keliling sebarang lingkaran dengan diameternya, kita gambarkan poligon (segi banyak) beraturan di dalam lingkaran.



Barisan bilangan rasional

Keliling setiap poligon tidak akan pernah sama dengan keliling lingkaran. Akan tetapi apabila jumlah sisi poligon “cukup besar”, maka selisih antara keliling lingkaran dengan keliling poligon tersebut sangatlah kecil, lebih kecil dari sebarang bilangan positif yang diberikan, misalkan

0.00000000000000000000000000000001

Barisan bilangan rasional

Jadi, apabila jumlah sisi poligon terus diperbesar , misalkan dari 4 sisi, 5 sisi, …, 60 sisi, 61 sisi, 62, 63, 64, dan seterusnya, dan kita lakukan pembagian keliling masing-masing poligon dengan diamter lingkaran, maka kita akan dapatkan barisan bilangan rasional, yang masing-masing bilangan nilainya kurang dari hasil bagi keliling lingkaran dengan diameternya (sebut π).

Bilangan di dalam barisan yang kita dapatkan tersebut, "semakin lama akan semakin dekat" dengan π (yaitu limit atau batas barisan).

Generalisasi masalah

Pada prinsipnya, nilai-nilai yang terletak pada sumbu Y dapat dipakai untuk menggambarkan nilai sebarang besaran. Demikian pula nilai-nilai yang terletak pada sumbu X.

Apabila nilai pada sumbu Y menyatakan jarak tempuh benda yang bergerak dan nilai pada sumbu X menyatakan waktu tempuh, maka slope mempunyai arti kecepatan/laju rata-rata.

ARTI LEBIH UMUM: Kecepatan/laju rata-rata diartikan sebagai perbandingan perubahan suatu besaran terhadap perubahan besaran yang lain.

Fungsi

- Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali dijumpai adanya keterkaitan atau hubungan antara satu obyek dengan obyek yang lain. Misalnya antara pedagang dan pembeli suatu barang, antara majikan dan pelayan, antara bank dan nasabah, dst.
- Hubungan-hubungan tersebut secara umum disebut relasi.
- Secara sistemik, suatu relasi menggambarkan hubungan antara anggota dari suatu kumpulan obyek dengan anggota dari kumpulan obyek yang lain.
- Relasi yang memenuhi syarat tertentu, yaitu apabila setiap unsur dalam suatu kumpulan obyek mempunyai hubungan dengan tepat satu obyek dari kumpulan yang lain, disebut fungsi.

Fungsi

Secara matematis, pengertian fungsi diberikan sebagai berikut:

- Diberikan himpunan tak kosong *A* dan *B*. Relasi dari *A* ke *B* adalah suatu himpunan .

$$R \subset A \times B$$

- Relasi dari *A* ke *B* sehingga untuk setiap anggota *A* berelasi dengan tepat satu anggota *B* disebut fungsi dari *A* ke *B*.

Fungsi

Jika sebarang anggota *A* diwakili dengan variabel x dan anggota *B* yang oleh fungsi *f* berelasi dengan x adalah *y*, maka fungsi *f* biasa diberikan dengan rumus

$$y = f(x)$$

Limit Fungsi

Dari contoh-contoh masalah pendekatan sebagaimana diuraikan di atas, kiranya secara matematis dapat dibuat rumusan umumnya:

"Apabila diberikan suatu fungsi f dengan rumus $y=f(x)$, maka berapa nilai y apabila x "sangat dekat" dengan c?"

Untuk lebih jelasnya, perhatikan beberapa contoh berikut.

Limit Fungsi

Contoh 1. Diberikan $f(x) = x + 1$. Berapa nilai $f(x)$ pada saat x "sangat dekat" dengan 0?

Jawab:

Nilai eksak yang menjadi jawaban pertanyaan di atas sulit ditentukan, bahkan tidak mungkin. Mengapa demikian? Karena kita tidak dapat memberikan kepastian nilai x yang dimaksud.

Meskipun demikian, nilai pendekatan untuk $f(x)$ yang dimaksud bisa ditentukan. Perhatikan tabel berikut.

Limit Fungsi

x	*f*(*x*)	*x*	*f*(*x*)
–1	0	1,24	2,24
–0,55	0,45	0.997	1,997
–0,125	0,875	0,00195	1,00195
–0,001	0,999	0,0000015	1,0000015
–0,000001	0,999999	0,000000001	1,000000001
…	…	…	…

Limit Fungsi

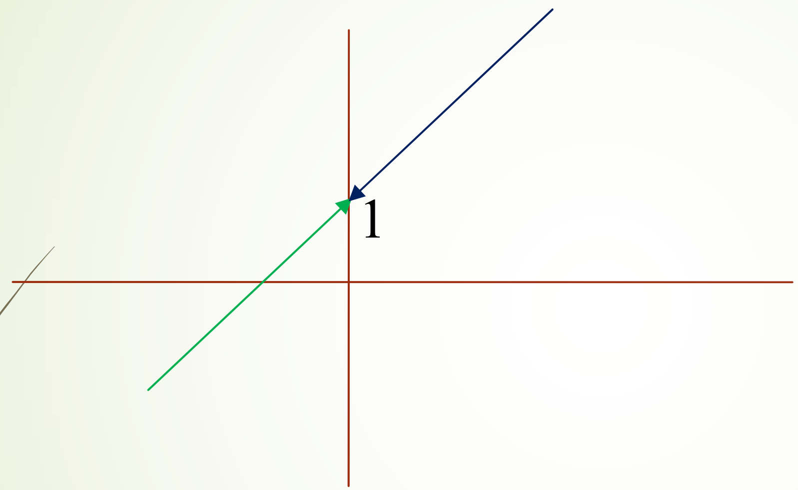
Dari tabel di atas dapat dilihat, apabila nilai x semakin "dekat" dengan 0, maka $f(x)$ akan semakin "dekat" dengan 1.

CATATAN:

Adalah suatu kebetulan bahwa $f(0) = .1$

Dengan grafik, dapat digambarkan sebagai berikut.

Limit Fungsi



Dari grafik dapat dilihat, apabila x sangat "dekat" dengan 0, baik untuk x<0 maupun untuk x>0, maka $f(x)$ sangat "dekat" dengan 1.

Limit Fungsi

Contoh 2. Diberikan

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Berapa nilai $g(x)$ pada saat x sangat "dekat" dengan 1?

Jawab:

Untuk kasus ini, jelas bahwa $g(1)$ tidak ada atau tak terdefinisi.

Yang menjadi pertanyaan, apakah hal itu berakibat $g(x)$ juga tidak ada untuk setiap x sangat "dekat" dengan 1?

Limit Fungsi

Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita perlu menganalisanya dengan cermat.

Perhatikan bahwa untuk $x \neq 1$,

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = f(x)$$

$\therefore$ Dalam hal ini, kita definisikan $f(x) = x + 1$

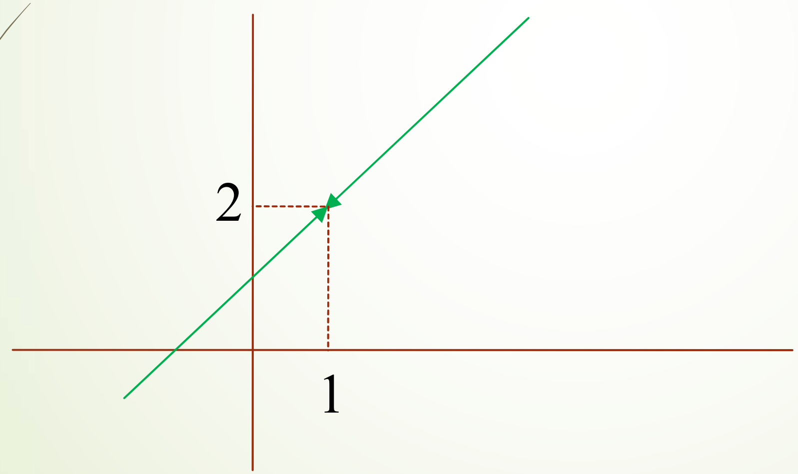
Selanjutnya, untuk berbagai nilai $x \neq 1$, nilai $g(x)$ dapat dilihat pada tabel berikut.

Limit Fungsi

x	$g(x)$	x	$g(x)$
0	1	1,24	2,24
0,557	1,557	1,0997	2,0997
0,799999	1,799999	1,00195	2,00195
0,999999001	1,999999001	1,0000015	2,0000015
0,999999999	0,999999999	1,000000001	2,000000001
...	...	...	...

Limit Fungsi

Dengan grafik, nilai *g*(x) untuk berbagai nilai x yang sangat “dekat” dengan 1 dapat dilihat pada gambar berikut.



Limit Fungsi

Jadi, baik dari tabel maupun dari grafik, diperoleh bahwa semakin “dekat” nilai x dengan 1, maka nilai $g(x)$ semakin “dekat” dengan 2.

Selanjutnya, perhatikan contoh berikut.

Limit Fungsi

Contoh 3. Diberikan

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Berapa nilai $h(x)$ pada saat x sangat “dekat” dengan 1?

Limit Fungsi

Jawab:

Jelas bahwa $h(1) = 1$. Muncul pertanyaan serupa dengan pertanyaan pada Contoh 2, yaitu:

Apakah keadaan tersebut, yaitu $h(1) = 1$, akan mengakibatkan $h(x)$ juga akan bernilai 1 ketika x sangat "dekat" dengan 1?

Limit Fungsi

Sama halnya seperti fungsi g pada Contoh 2,

bahwa untuk $x \neq 1$,

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 = f(x)$$

Dalam hal ini, kita definisikan $f(x) = x + 1$

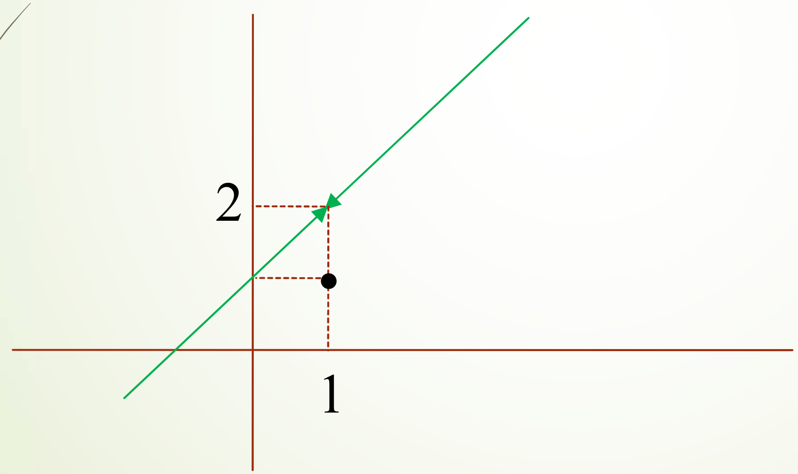
Selanjutnya, untuk berbagai nilai $x \neq 1$, nilai $h(x)$ dapat dilihat pada tabel berikut.

Limit Fungsi

x	$h(x)$	x	$h(x)$
0	1	1,24	2,24
0,557	1,557	1,0997	2,0997
0,799999	1,799999	1,00195	2,00195
0,999999001	1,999999001	1,0000015	2,0000015
0,999999999	0,999999999	1,000000001	2,000000001
…	…	…	…

Limit Fungsi

Dengan grafik, nilai $h(x)$ untuk berbagai nilai x yang sangat "dekat" dengan 1 dapat dilihat pada gambar berikut.



Limit Fungsi

Jadi, baik dari tabel maupun dari grafik, diperoleh bahwa semakin “dekat” nilai x dengan 1, maka nilai $h(x)$ semakin “dekat” dengan 2.

Limit Fungsi

Dari Contoh 1, Contoh 2, dan Contoh 3, apabila kita perhatikan beberapa hal yang sama (dalam hal ini tidak usah memperhatikan nilai fungsi di 0 untuk Contoh 1 dan nilai fungsi di 1 untuk Contoh 2 dan Contoh 3), berturut-turut kita katakan:

- Limit $f(x)$ untuk x mendekati 0 sama dengan 1,
- Limit $g(x)$ untuk x mendekati 1 sama dengan 2,
- Limit $h(x)$ untuk x mendekati 1 sama dengan 2,

dan masing-masing ditulis dengan

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1, \ \lim_{x \to 1} g(x) = 2, \text{ dan} \lim_{x \to 1} h(x) = 2$$

Limit Fungsi

Dengan demikian, dapat diturunkan definisi limit fungsi secara formal, yaitu sebagai berikut.

Definisi 4. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit *L* untuk x mendekati *c*, ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika untuk nilai x yang sangat "dekat" dengan c, tetapi $x \neq c$, berakibat *f*(x) "mendekati" *L*.

Sifat-sifat Dasar Limit Fungsi

(i) $\lim\limits_{x \to c} k = k$

(ii) $\lim\limits_{x \to c} x = c$

(iii) Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ ada, dan $k \in R$
maka:

(a) $\lim\limits_{x \to c} \{ f(x) + g(x) \} = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to c} kf(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

Sifat-sifat Dasar Limit Fungsi

(c) $$\lim_{x \to c}\{f(x).g(x)\} = \lim_{x \to c} f(x).\lim_{x \to c} g(x)$$

(d) $$\lim_{x \to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)},\ \text{asalkan}\ \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$$

Sifat-sifat Dasar Limit Fungsi

(e) untuk sebarang $n \in N$,

$$(1)\ \lim_{x \to c} \{f(x)\}^n = \left\{\lim_{x \to c} f(x)\right\}^n$$

$$(2)\ \lim_{x \to c} \{f(x)\}^{-n} = \left\{\lim_{x \to c} f(x)\right\}^{-n},$$

$$\text{asalkan } \lim_{x \to c} f(x) \neq 0$$

$$(3)\ \lim_{x \to c} \{f(x)\}^{1/n} = \left\{\lim_{x \to c} f(x)\right\}^{1/n},$$

$$\text{asalkan untuk } n \text{ genap, } \lim_{x \to c} f(x) \geq 0.$$

Contoh-contoh

1. Hitung $\lim\limits_{x \to -1} \left(3x^2 - x - 6\right)$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to -1} \left(3x^2 - x - 6\right) = \lim_{x \to -1} 3x^2 - \lim_{x \to -1} x - \lim_{x \to -1} 6$$

$$= 3 \lim_{x \to -1} x^2 - (-1) - 6$$

$$= 3\left(\lim_{x \to -1} x\right)^2 + 1 - 6$$

$$= 3(-1)^2 + 1 - 6 = -2$$

Contoh-contoh

2. Hitung $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-15}{x+3}$$

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-15}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x-15\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x+3\right)}$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-2\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}15}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\frac{2^2-2.2-15}{2+3}$$

$$=-3$$

Contoh-contoh

3. Hitung $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{1}{5x-1}}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{5x-1}} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{5x-1}\right)^{1/2} = \left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{5x-1}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 2}(5x-1)}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{5\lim\limits_{x\to 2}x - \lim\limits_{x\to 2}1}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{5.2-1}\right)^{1/2} = \frac{1}{3}$$

Contoh-contoh

4. Hitung $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

   Penyelesaian:

   Karena $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$ dan $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$,

   maka sifat $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$

   tak dapat langsung digunakan. Apakah dengan demikian limit yang ditanyakan menjadi tak ada?

Contoh-contoh

Perhatikan bahwa untuk $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x-2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

Contoh-contoh

5. Hitung $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)\sqrt{x^2+5}+3} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2+2}{\sqrt{9}+3} = \frac{2}{3}$$

Limit Tak Hingga

Untuk $c = \infty$, definisi limit dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 5. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit *L* untuk x mendekati ∞, ditulis

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

jika untuk nilai x yang "sangat besar tak terbatas" arah positif berakibat *f*(x) "mendekati" *L*.

Limit Tak Hingga

Untuk $c = -\infty$, definisi limit dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 6. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit *L* untuk x mendekati $-\infty$, ditulis

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

jika untuk nilai x yang "sangat besar tak terbatas" arah negatif berakibat *f*(x) "mendekati" *L*.

Limit Tak Hingga

Definisi 7. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit tak hingga untuk x mendekati c , ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

jika untuk nilai x yang "sangat dekat" dengan c, tetapi $x \neq c$ berakibat nilai *f*(x) menjadi "besar tak terbatas" arah positif.

Limit Tak Hingga

Definisi 8. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit negatif tak hingga untuk x mendekati c, ditulis

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk nilai x yang "sangat dekat" dengan c, tetapi $x \neq c$ berakibat nilai *f*(x) menjadi "besar tak terbatas" arah negatif.

Limit Tak Hingga

Definisi 9. Fungsi *f* dikatakan mempunyai limit tak hingga untuk x mendekati tak hingga, ditulis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

jika untuk nilai x yang "cukup besar" arah positif, berakibat nilai *f*(x) menjadi "besar tak terbatas" arah positif.

Limit Tak Hingga

Untuk limit-limit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \text{ dan } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

didefinisikan secara sama.

Limit Tak Hingga

Dari definisi-definisi di atas, mudah dipahami:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\ \text{untuk}\ \ x>0$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty,\ \text{untuk}\ \ x<0$$

$$3.\ \lim_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0$$

$$4.\ \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$5.\ \lim_{x\to \infty}x=\infty$$

$$6.\ \lim_{x\to -\infty}x=-\infty$$

Contoh-contoh

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x-1)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\right)^2=-1.\infty=-\infty$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y},\quad (y=x-1)$$

$$=0$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\left(x^2-3x+7\right)=\lim_{x\to\infty}x(x-3)+\lim_{x\to\infty}7=\infty$$

Contoh-contoh

1. Hitunglah $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 - 2x + 5}$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty} (3x^2 - 1) = \infty \text{ dan } \lim_{x\to\infty} (x^2 - 2x + 5) = \infty$$

Hal ini berakibat nilai limit yang ditanyakan menjadi susah dikatakan. Apakah limit tersebut tak ada?

Contoh-contoh

Perhatikan bahwa

$$\frac{3x^2-1}{x^2-2x+5}=\frac{x^2(3-1/x^2)}{x^2(1-2/x+5/x^2)}=\frac{3-1/x^2}{1-2/x+5/x^2}$$

Oleh karena itu, menggunakan sifat limit diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x^2}{1-2/x+5/x^2}=\frac{3}{1}=3$$

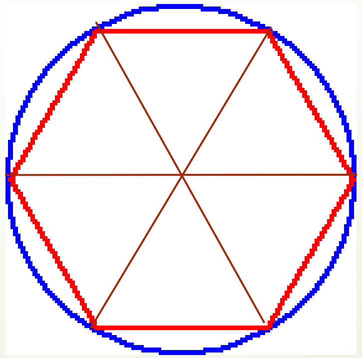
Contoh aplikasi Limit Fungsi

Contoh 6.

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari *R* sama dengan $2\pi R$.

Penyelesaian:

Dibuat segi *n* beraturan di dalam lingkaran sehingga setiap titik sudutnya berada pada lingkaran.



Contoh Aplikasi Limit Fungsi

Keliling segi *n* tersebut adalah

$$L_n = n\sqrt{2R^2\left(1-\cos\left(2\pi/n\right)\right)} = \frac{\sqrt{2R^2\left(1-\cos\left(2\pi/n\right)\right)}}{1/n}$$

Untuk *n* cukup besar, maka nilai L_n akan mendekati keliling lingkaran. Oleh karena itu, keliling lingkaran adalah

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi R$$

Contoh Aplikasi Limit Fungsi

Contoh 7.

Suatu partikel bergerak mengikuti persamaan

$$S(t) = t^2 + 4t,\ \ t \geq 0$$

dengan *t* menyatakan waktu (dalam jam) dan *S*(*t*) menyatakan jarak tempuh. Berapa kecepatan partikel pada jam 2?

Contoh Aplikasi Limit Fungsi

Penyelesaian:

Kecepatan rata-rata partikel dari jam 2 sampai dengan jam 2+*h*, dengan $h \neq 0$ adalah

$$v_h = \frac{S(2+h) - S(2)}{h} = 8 + h$$

Apabila diambil *h* sangat kecil mendekati 0, maka akan diperoleh kecepatan pada saat jam 2, yaitu

$$v(2) = \lim_{h \to 0} v_h = 8$$