METODE NUMERIK

3SKS-TEKNIK INFORMATIKA-S1

Mohamad Sidiq

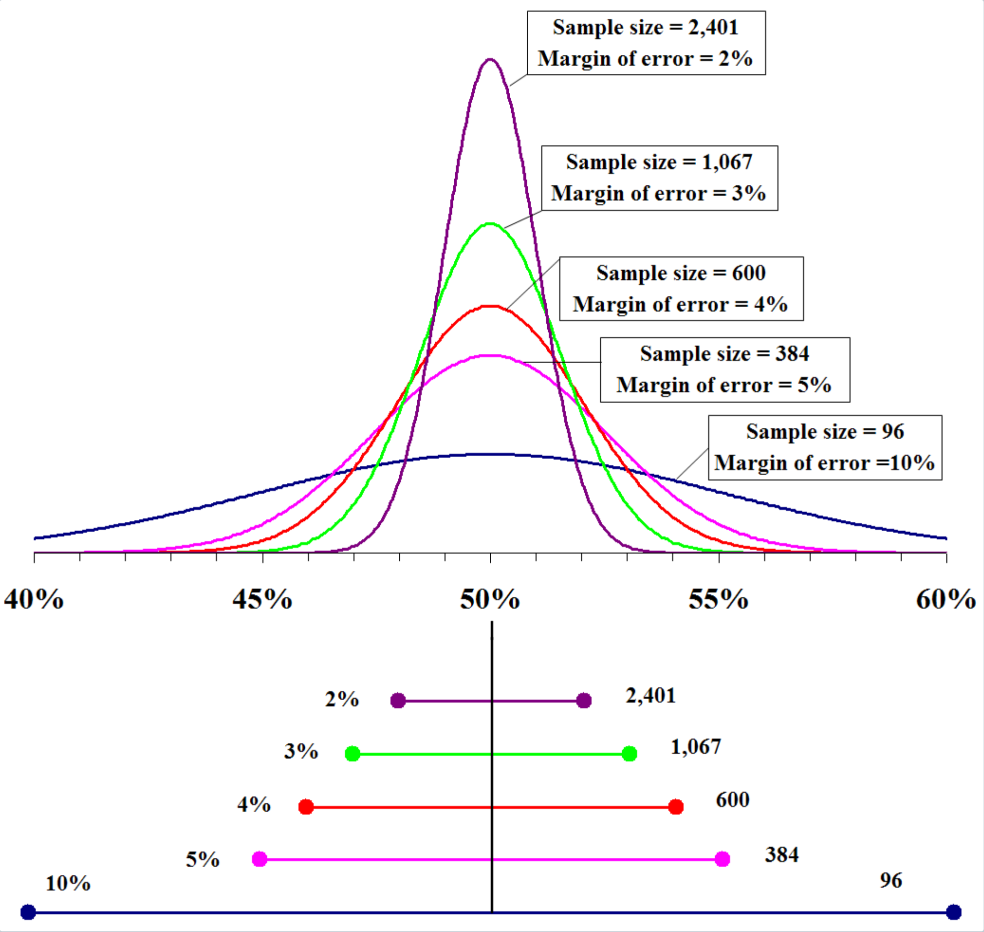
PERTEMUAN-2

SISTEM BILANGAN DAN KESALAHAN

METODE NUMERIK

- TEKNIK INFORMATIKA – S1
- 3 SKS

Mohamad Sidiq



MATERI PERKULIAHAN

SEBELUM-UTS	SETELAH-UTS

▪ Pengantar Metode Numerik
▪ Sistem Bilangan dan Kesalahan
  ▪ Penyajian Bilangan Bulat & Pecahan
  ▪ Nilai Signifikan
  ▪ Akurasi dan Presisi
  ▪ Pendekatan dan Kesalahan
▪ Penyelesaian Persamaan Non Linier
  ▪ Metode Tabel
  ▪ Metode Biseksi
  ▪ Metode Regula Falsi
▪ Penyelesaian Persamaan Non Linier (Lanjutan)
  ▪ Metode Iterasi Sederhana
  ▪ Metode Newton Raphson
  ▪ Metode Secant
▪ Penyelesaian Persamaan Simultan
  ▪ Metode Eliminasi Gauss
  ▪ Metode Gauss Jordan
▪ Penyelesaian Persamaan Simultan (Lanjutan)
  ▪ Metode Gauss Seidel
  ▪ Studi Kasus
▪ Diferensi Numerik
  ▪ Selisih Maju
  ▪ Selisih Tengahan
  ▪ Diferensi Tingkat Tinggi
	▪ Integrasi Numerik
	  ▪ Metode Reimann
	  ▪ Metode Trapezoida
	  ▪ Metode Simpson
	▪ Integrasi Numerik (Lanjutan)
	  ▪ Metode Gauss
	  ▪ Studi Kasus
	▪ Interpolasi
	  ▪ Metode Linier
	  ▪ Metode Kuadrat
	▪ Interpolasi (Lanjutan)
	  ▪ Metode Polinomial
	  ▪ Metode Lagrange
	▪ Regresi
	  ▪ Linier
	  ▪ Eksponensial
	  ▪ Polinomial
	▪ Tugas Akhir Semester

SISTEM BILANGAN

- Sistem bilangan (*numeral system*) adalah sistem tulisan untuk mengungkapkan angka, yaitu notasi matematis untuk mewakili nomor dari satu set tertentu, menggunakan angka atau simbol-simbol lainnya secara konsisten.
- Simbol "11" harus ditafsirkan sebagai simbol biner untuk tiga, simbol desimal untuk sebelas atau simbol untuk nomor lainnya dalam basis yang berbeda.
- Simbol ‘11’ dan ‘XI’ adalah simbol yang berbeda tetapi dapat mempunyai tafsir yang sama yaitu sebagai representasi angka ‘sebelas’ jika simbol ‘11’ sebagai simbol desimal, sedangkan simbol ‘XI’ sebagai simbol angka Romawi.
- *Nomor yang mewakili angka disebut nilainya.*

PENYAJIAN SISTEM BILANGAN BULAT

- Bilangan bulat yang sering digunakan adalah bilangan bulat dalam sistem bilangan desimal yang didefiniskan:

  $N = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots . a_0)$

  $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \cdots + a_0 10^0$

  Contoh: $2673 = 2.10^3 + 6.10^2 + 7.10^1 + 3.10^0$

- Bilangan bulat dengan bilangan dasar *c* didefinisikan dengan:

  $N = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots . a_0)_c$

  $N = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{n-2} + \cdots + a_0 c^0$

- Bilangan biner dapat diformulisikan menggunakan rumus di atas dengan mengganti *c* dengan 2, sehingga:

  $N = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots . a_0)_2$

  $N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + a_{n-2} 2^{n-2} + \cdots + a_0 2^0$

  Contoh: $(1101)_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^2$

KONVERSI BILANGAN BULAT

- Algoritma:

Bila diketahui koefisien-koefisien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dari polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$$

dan suatu bilangan β .Maka dapat dihitung $b_n, b_{n-1}, .., b_0$ dari β sebagai berikut

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + b_n \beta$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-1} \beta$$

....

$$b_0 = a_0 + b_1 \beta.$$

- Algoritma ini banyak digunakan untuk menghitung konversi bilangan secara cepat karena tidak menggunakan pangkat yang membuat kesalahan numerik menjadi lebih besar.
- Contoh: Konversi bilangan biner $(1101)_2$ ke desimal dapat dihitung:

$b_3 = 1$
$b_2 = a_2 + b_3\ \beta = 1 + 1.2 = 3$
$b_1 = a_1 + b_2\ \beta = 0 + 3.2 = 6$
$b_0 = a_0 + b_1\ \beta = 1 + 6.2 = 13$
Jadi $(1101)_2 = 13$

$(1101)_2 = 1x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$
$= 8 + 4 + 0 + 1 = 13$

KONVERSI BILANGAN BULAT (LANJ)

- Contoh: Konversi bilangan oktal $(721)_8$ ke desimal

  $b_2 = 7$

  $b_1 = a_1 + b_2\,\beta = 2 + 7.8 = 58$

  $b_0 = a_0 + b_1\,\beta = 1 + 58.8 = 465$

  Jadi $(721)_8 = 465$

- Latihan:
  - $(187)_{10} = (\ldots\ldots..)_2$
  - $(530)_8 = (\ldots\ldots..)_2$
  - $(1022)_8 = (\ldots\ldots..)_{10}$
  - $(101101)_2 = (\ldots\ldots..)_8$
  - $(530)_{10} = (\ldots\ldots..)_8$

PENYAJIAN BILANGAN PECAHAN

- Bilangan pecahan *x* antara 0 s/d 1 dalam sistem bilangan desimal didefinisikan:

$$x = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_n)$$
$$= a_1\, 10^{-1} + a_2\, 10^{-2} + a_3\, 10^{-3} + \ldots + a_n\, 10^{-n}$$

- Bilangan pecahan *x* secara umum dalam sistem bilangan dengan bilangan dasar *k* didefinisikan:

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n)_k = \sum_{i=1}^{n} a_i k^{-i}$$

- Contoh 1:

$0{,}625 = 6.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3}$

- Contoh 2:

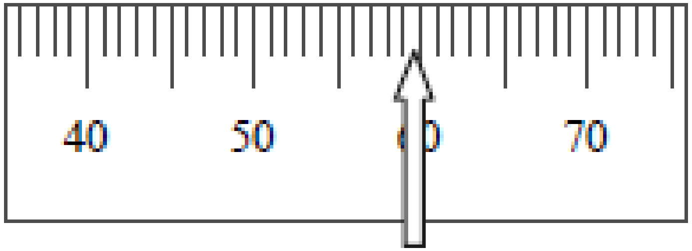
$(0{,}101)_2 = 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.2^{-3}$

$= 0{,}5 + 0 + 0{,}125$

$= 0{,}625$

NILAI SIGNIFIKAN

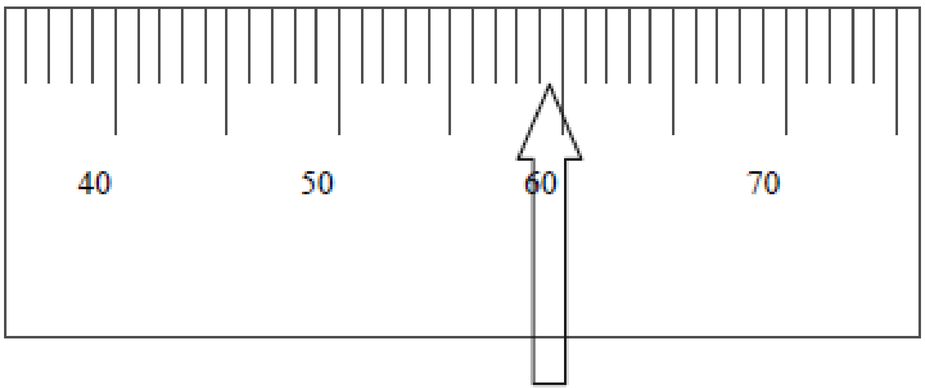
- Nilai signifikan adalah suatu nilai di mana jumlah angka ditentukan sebagai batas nilai tersebut diterima atau tidak
- Perhatikan nilai pada penggaris berikut:



- Nilai yang ditunjuk tidak tepat pada angka yang ditentukan karena selisih 1 strip.
- Bila dalam kejadian ini dianggap nilai signifikan adalah 1, maka nilainya 59 atau 60

NILAI SIGNIFIKAN (LANJ)

› Bilai penggaris tersebut dilihat dengan skala lebih besar pada daerah yang ditunjuk oleh jarum:



› Dari gambar ini, dengan nilai signifikan 10^{-1} (0,1), maka diperoleh nilainya 59 atau 59,5.

ANGKA SIGNIFIKAN (ANGKA BENA)

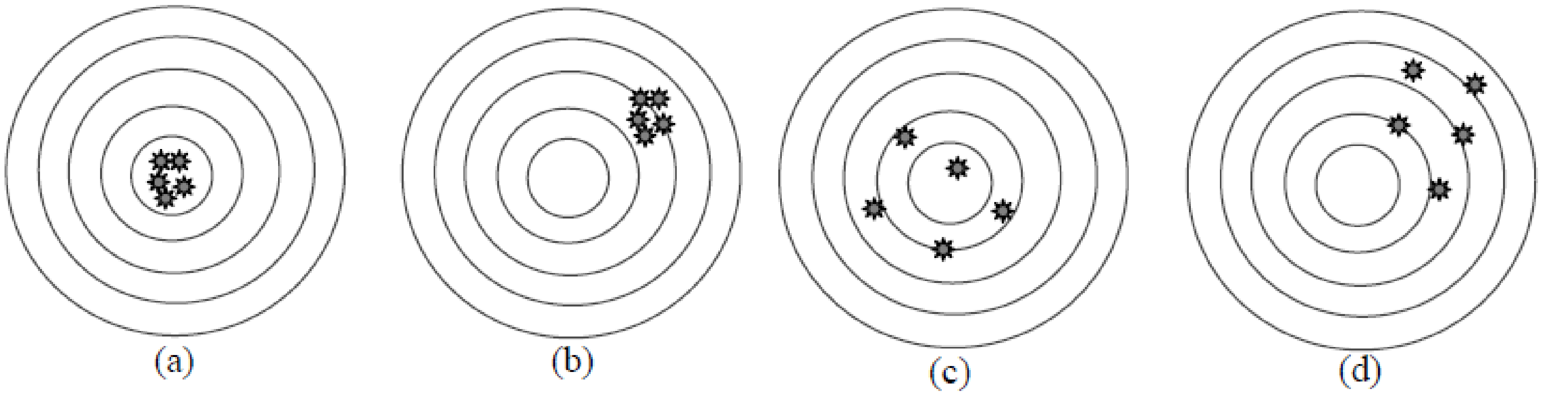
- Angka signifikan merupakan banyaknya digit yang diperhitungkan di dalam suatu kuantitas yang diukur atau dihitung.
- Ketika angka signifikan digunakan, digit terakhir dianggap tidak pasti. Ketidakpastian dari digit terakhir tergantung pada alat yang digunakan dalam suatu pengukuran.
- Aturan penulisan angka signifikan:
  - Setiap angka yang tidak nol merupakan angka signifikan. Contoh: 91 memiliki 2 angka signifikan (9 dan 1) dan 123,45 memiliki 5 angka signifikan (1,2,3,4 dan 5).
  - Angka-angka nol yang terletak di antara angka bukan nol merupakan angka signifikan. Contoh: 2,008 memiliki 4 angka signifikan (2, 0, 0, dan 8).
  - Angka nol terakhir di sebelah kanan koma desimal merupakan angka signifikan. Seperti 10.070 memiliki lima angka signifikan.
  - Angka nol di sebelah kiri dari angka pertama bukan nol merupakan angka tak signifikan. Contoh: 0,00008 memiliki 1 angka signifikan (8).
  - Nol yang terdapat di ujung dari deret angka dan disebelah kiri dari koma desimal dapat atau tidak dapat menjadi angka signifikan.

AKURASI DAN PRESISI

- Dalam bidang ilmu pengetahuan, industri rekayasa, dan statistik, akurasi dari suatu sistem pengukuran adalah tingkat kedekatan pengukuran kuantitas terhadap nilai yang sebenarnya.
- Ke-presisi-an dari suatu sistem pengukuran, disebut juga reproduktifitas (*reproducibility*) atau pengulangan (*repeatability*), adalah sejauh mana pengulangan pengukuran dalam kondisi yang tidak berubah mendapatkan hasil yang sama.
- Sebuah sistem pengukuran dapat *akurat dan tepat*, atau *akurat tetapi tidak tepat*, atau *tepat tetapi tidak akurat* atau *tidak tepat dan tidak akurat*.

AKURASI DAN PRESISI (LANJ)

- Perhatikan hasil tembakan yang dilakukan 4 orang berikut:



- Ilustrasi di atas digunakan untuk menjelaskan perbedaan antara akurasi dan presisi. Dalam ilustrasi ini, pengukuran berulang diibaratkan dengan peluru yang ditembakkan ke target lingkaran sebanyak 5 kali. Akurasi menggambarkan kedekatan lubang peluru dengan pusat sasaran. Lubag peluru yang lebih dekat dengan pusat sasaran dianggap lebih akurat. Semakin dekat sistem pengukuran terhadap nilai yang diterima, sistem dianggap lebih akurat.

- Jika beberapa kali peluru ditembakkan, presisi adalah ukuran kedekatan dari masing-masing lubang peluru dalam kumpulan tersebut. Semakin menyempit kumpulan lubang peluru tersebut, sistem dianggap semakin presisi.

- Dari penjelasan di atas, maka dapat disimpulkan hasil tembakan 4 orang tersebut yaitu: (a) presisi dan akurat, (b) presisi tetapi tidak akurat, (c) akurat tetapi tidak presisi, dan (d) tidak akurat dan tidak presisi

AKURASI DAN PRESISI (LANJ)

- Nilai presisi mengacu pada jumlah angka signifikan yang digunakan dan sebaran bacaan berulang pada alat ukur.
- Penggunaan alat ukur penggaris dan jangka sorong akan mempunyai perbedaan nilai presisi. Jangka sorong memiliki presisi yang lebih tinggi dibandingkan dengan penggaris.
- Nilai akurat atau akurasi mengacu pada dekatnya nilai pendekatan yang dihasilkan dengan nilai acuan eksak. Misalkan nilai eksak diketahui ½, sedangkan hasil pendekatan adalah 0,500001, maka hasil ini dikatakan akurat bila toleransinya 10^{-4}.
- Dari keadaan akurasi dan presisi ini, akan muncul apa yang dinamakan kesalahan atau galat atau *error*.
- Dalam analisa numerik, yang penyelesaiaannya dihitung menggunakan nilai-nilai pendekatan, *error* menjadi hal yag sangat penting dan diperhatikan.

PENDEKATAN DAN KESALAHAN

- Kesalahan atau error atau galat adalah besarnya perbedaan atau selisih antara nilai taksiran (hampiran/aproksimasi) dengan nilai sesungguhnya (eksak) yang diakibatkan oleh proses pengukuran atau penggunaan aproksimasi.
- Besarnya kesalahan atas suatu nilai taksiran dapat dinyatakan secara kuantitatif dan kualitatif.
- Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kuantitatif disebut Kesalahan Absolut.
- Besarnya kesalahan yang dinyatakan secara kualitatif disebut dengan Kesalahan Relatif.

KESALAHAN NUMERIK

- Kesalahan numerik adalah kesalahan yang timbul karena adanya proses pendekatan.
- Kesalahan numerik terjadi karena:
  - **Kesalahan bawaan (*inherent error*)**, adalah kesalahan data ditimbulkan karena adanya kesalahan pengukuran, kesalahan pencatatan atau tidak memahami hukum-hukum fisik dari data yang diukur.
  - **Kesalahan pembulatan (*truncation error*)**, adalah kesalahan terjadi karena adanya pembulatan. Contoh : 3,142857143 dibulatkan menjadi 3,14.
  - **Kesalahan pemotongan (*truncation error*)**, adalah kesalahan yang ditimbulkan pada saat dilakukan pengurangan jumlah angka signifikan.

HUBUNGAN KESALAHAN & PENYELESAIAN

- Rumus hubungan kesalahan dan penyelesaian:

$$\tilde{x} = x + e$$

  $\tilde{x}$ = nilai eksak (nilai yang sebenarnya)
  x = nilai pendekatan yang dihasilakan dari metode numerik
  e = nilai kesalahan numerik

- Kesalahan fraksional adalah prosentase antara kesalahandan nilai sebenarnya.

$$\in = \left(\frac{e}{\tilde{x}}\right) * 100\%$$

  – Pada banyak permasalahan kesalahan fraksional sulit atau tidak bisa dihitung, karena nilai eksaknya tidak diketahui.
  – Sehingga kesalahan fraksional dihitung berdasarkan nilai pendekatan yang diperoleh:

$$\in = \left(\frac{e}{x}\right) * 100\%$$

  – Di mana *e* pada waktu ke *n* adalah selisih nilai pendekatan ke *n* dan ke *n-1*

$$\in = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right) * 100\%$$

KESALAHAN ABSOLUT & RELATIF

- Kesalahan absolut menunjukkan besarnya perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan.

$$e = |\tilde{x} - x|$$

- Kesalahan absolut tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan, tetapi hanya sekedar menunjukkan selisih perbedaan antara nilai eksak dengan nilai perkiraan.
- Kesalahan relatif menunjukkan besarnya tingkat kesalahan antara nilai perkiraan dengan nilai eksaknya yang dihitung dengan membandingkan kesalahan absolut terhadap nilai eksaknya.

$$\in = \left|\frac{e}{\tilde{x}}\right| * 100\%$$

$\tilde{x}$ = nilai eksak (nilai yang sebenarnya)

e = nilai kesalahan mutlak

$\in$ = nilai kesalaha relatif

- Semakin kecil kesalahan relatifnya, maka nilai perkiraan yang diperoleh akan semakin baik.

CONTOH 1

- Budi membeli kabel listrik sepanjang 30 meter dari sebuah toko alat-alat elektronika. Setelah sampai rumah, Budi mengukur kabel yang baru dibeli menggunakan meteran gulung, dan ternyata panjang kabelnya hanya 29,97 meter.
- Berapa kesalahan absolut dan kesalahan relatif hasil pengukuran yang dilakukan oleh Budi?

PENYELESAIAN

- Diketahui :

  $\tilde{x}$ = 30 meter

  x = 29,97 meter

- Kesalahan absolut

  e = | $\tilde{x} - x$|

  e = | 30 – 29,97 | = 0,03 meter

- Kesalahan relatif

  $$\in= \left|\frac{e}{\tilde{x}}\right| * 100\%$$

  $$\in= \left|\frac{0{,}03}{30}\right| * 100\% = 0{,}1\%$$

CONTOH 2

Pengukuran panjang jembatan dan pensil memberikan hasil 9999 cm dan 9 cm. Apabila panjang yang benar (eksak) adalah 10.000 cm dan 10 cm. Hitung kesalahan absolut dan relatif!

Solusi :

a. **Kesalahan absolut**

Jembatan : $e = |x' - x| = |10.000 - 9999| = 1$ cm

Pensil : $e = |x' - x| = |10 - 9| = 1$ cm

b. **Kesalahan relatif**

Jembatan : $\in = \left|\frac{1}{10.000}\right| * 100\% = 0,01\%$

Pensil : $\in = \left|\frac{1}{10}\right| * 100\% = 10\%$

Kedua kesalahan sama yaitu 1 cm tetapi kesalahan relatif pensil adalah jauh lebih besar

LATIHAN

- Seorang pembeli bensin di sebuah SPBU membayar bensin yang dibeli sebesar Rp. 33,000 dengan harga bensin Rp. 1,000/ liter. Pada meteran pengeluaran bensin di SPBU tersebut menunjukkan angka 32,782 liter. Berapa % tingkat kesalahan yang harus ditanggung dan berapa rupiah kerugian pembeli bensin akibat kecerobohan petugas di SPBU dalam menagih pembayaran bensin tersebut!
- Diketahui deret Maclaurin untuk e^{-2x} dengan x = 0,1

  $$e^{-2x} = 1 – 2/1!\, x + 4/2!\, x^2 – 8/3!\, x^3 + 16/4!\, x^4 + ...$$

  Tentukan nilai taksiran untuk e^{-2x} dan berapa nilai kesalahannya apabila penghitungan dilakukan hanya dengan memperhitungkan 3 suku dari deret tersebut!

LATIHAN

- Diketahui deret MacLaurin untuk cos x:

  $$\text{Cos } x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \ldots.$$

  Tentukan nilai taksiran untuk cos(π/4) dan berapa nilai kesalahannya apabila penghitungan dilakukan hanya dengan memperhitungkan 3 suku dari deret tersebut! {cos(π/4) = 0,525322}.

- Bulatkan angka-angka berikut hingga ketelitian yang diinginkan dan berapa tingkat kesalahan hasil pembulatan:
  a. 12.934,5000 (seperseribuan terdekat)
  b. 100.001,99 (ribuan terdekat)
  c. 2,71828200 (seperseratusan terdekat)
  d. 0,55555 (sepersejutaan terdekat)
  e. 96,50000 (satuan terdekat)
  f. 76,66666 (puluhan terdekat)